

## **Accélération des particules : les mécanismes de Fermi**

Etienne Parizot

*Institut de Physique Nucléaire d'Orsay*  
*CNRS-IN2P3/Université Paris-Sud, 91406 Orsay Cedex, France*  
parizot@ipno.in2p3.fr

**Abstract.** Nous présentons ici quelques idées générales sur l'accélération des particules dans l'univers, ainsi que les bases théoriques permettant de comprendre les mécanismes d'accélération "de Fermi", du premier et du second ordre. Nous montrons en particulier comment ces mécanismes produisent une composante de particules énergétiques ayant un spectre d'énergie en loi de puissance, et nous calculons explicitement le spectre obtenu au voisinage d'une onde de choc plane en régime stationnaire. Nous introduisons également la théorie cinétique, et calculons à nouveau le spectre des particules énergétiques à partir de l'équation de transport dans l'approximation diffusive.

### **Table des matières**

<b>1. Introduction</b>	<b>89</b>
<b>2. Accélération des particules et champs magnétiques</b>	<b>89</b>
<b>3. Le modèle des "nuages magnétiques" : Fermi, 1949</b>	<b>92</b>
3.1 Une analogie tennistique . . . . .	93
3.2 Le modèle de Fermi . . . . .	96
3.3 Changement de référentiel ou champ électrique induit : deux approches équivalentes . . . . .	99
Double changement de référentiel . . . . .	100
Action du champ électrique induit . . . . .	100
3.4 Calcul de l'accélération de Fermi du second ordre . . . . .	102
3.5 Mécanismes de Fermi et spectres en loi de puissance . . . . .	104
3.6 Les problèmes du modèle de Fermi . . . . .	106

<b>4. Versions modernes de l'accélération de Fermi du second ordre</b>	<b>107</b>
4.1 Ondes plasma et "centres diffuseurs" . . . . .	107
Les ondes d'Alfvén . . . . .	109
Les ondes magnéto-soniques . . . . .	110
Principales interactions résonnantes . . . . .	111
Génération d'ondes MHD et isotropisation . . . . .	111
4.2 L'accélération stochastique "de Fermi", ou accélération turbulente . . . . .	112
<b>5. L'accélération par onde de choc : un processus de Fermi du premier ordre</b>	<b>113</b>
5.1 Des ondes de choc interstellaires . . . . .	114
Les relations de passage . . . . .	115
Microscopie d'une onde de choc . . . . .	116
5.2 Le principe de l'accélération diffusive par onde de choc .	117
5.3 Une accélération de Fermi du premier ordre . . . . .	119
5.4 Un spectre en loi de puissance universel . . . . .	121
5.5 Les miracles de l'accélération diffusive par onde de choc .	123
5.6 Accélération de Fermi du premier et du second ordre . .	125
<b>6. L'approche de la théorie cinétique</b>	<b>127</b>
6.1 Introduction sommaire à la théorie cinétique . . . . .	127
L'équation de Liouville . . . . .	127
Les fonctions de distribution . . . . .	129
La hiérarchie BBGKY . . . . .	129
Équations de Fokker-Planck et de Vlasov . . . . .	130
La séparation des particules énergétiques et du plasma .	131
6.2 L'équation de transport des particules énergétiques . . .	131
L'équation fondamentale . . . . .	131
L'approximation diffusive . . . . .	133
Signification physique des différents termes . . . . .	134
6.3 Nouvelle dérivation de l'équation de transport . . . . .	136
6.4 Calcul du spectre des particules accélérées au voisinage d'une onde de choc . . . . .	138
<b>7. Conclusion</b>	<b>141</b>

## 1. Introduction

La caractéristique la plus remarquable du rayonnement cosmique est sans doute son spectre d'énergie en loi de puissance, s'étendant sur au moins 12 ordres de grandeur en énergie et 32 ordres de grandeur en flux. Ce spectre associe d'emblée le rayonnement cosmique à un phénomène *non-thermique*, hors-équilibre. N'est-il pas troublant, alors que tout en physique tend à se thermaliser, qu'une telle population de particules remplisse les galaxies et se maintienne ainsi de manière spontanée et quasi universelle ? Pourtant, toute l'astronomie moderne en témoigne : les sources de rayonnement non-thermique, radio, X ou gamma, sont omniprésentes dans l'univers, et ces rayonnements ne peuvent provenir que de processus physiques élémentaires impliquant des particules elles-mêmes supra-thermiques, qui ont donc dû être accélérées d'une manière ou d'une autre. Aussi la question de l'accélération des particules intéresse-t-elle une communauté beaucoup plus large que celle des "radiocosmiciens", incluant tous les astrophysiciens qui s'intéressent aux sources non-thermiques de l'univers, allant des proto-étoiles aux noyaux actifs de galaxie, en passant par les sursauts gamma, les pulsars, les restes de supernova ou les jets relativistes.

Comme s'en sont étonnés jadis les premiers astronomes qui découvrirent les rayonnements non-thermiques, il semble que les spectres d'énergie en loi de puissance soient communs dans l'univers, et qu'en outre les indices spectraux des différentes sources soient comparables, et proches de l'indice du rayonnement cosmique (entre  $E^{-2}$  et  $E^{-2.3}$  à la source). Ceci laisse penser qu'un même type de mécanismes pourrait être à l'œuvre dans des environnements astrophysiques très divers.

Dans ce chapitre, nous donnerons quelques idées générales sur les processus pouvant conduire à l'accélération de particules dans l'univers, en nous concentrant sur les mécanismes dits "de Fermi". Nous indiquerons quels types d'outils sont utilisés par les théoriciens dans ce domaine, et quelle est la physique sous-jacente. Nous mènerons explicitement le calcul du spectre des particules énergétiques produites au voisinage d'une onde de choc, dans le cas le plus simple, et donnerons un aperçu du type de complications qui peuvent intervenir dans des cas plus réalistes.

## 2. Accélération des particules et champs magnétiques

Commençons par une phrase vraie : pour accélérer des particules, il faut leur communiquer de l'énergie, et donc la prendre quelque part ! L'énergie est disponible sous différentes formes dans la Galaxie. Il y a de l'énergie cinétique : de translation, comme dans les ondes de choc, la turbulence ou les nuages interstellaires en mouvement, ou de rotation,

comme dans les pulsars. Il y a aussi de l'énergie gravitationnelle, libérée *via* le phénomène d'accrétion au voisinage des trous noirs ou des étoiles à neutrons. Il y a encore de l'énergie électromagnétique, générée par turbulence en milieu ionisé, par compression lors de l'effondrement des astres ou des nuages, ou par la rotation des puissants aimants que sont les étoiles à neutrons.

Mais quelle que puisse être la source de l'énergie communiquée aux particules, c'est *in fine* avec les champs électromagnétiques que les interactions se produisent et qu'ont lieu les échanges d'énergie. La matière est si raréfiée dans le milieu interstellaire qu'il est impossible de communiquer de l'énergie à une particule par simple "choc", comme on accélérerait une balle de tennis avec une raquette, ou un objet léger avec un courant d'air. Il sera question d'ondes de choc par la suite, mais il faut bien réaliser qu'il s'agit toujours, dans le milieu interstellaire, de "chocs non collisionnels" – expression paradoxale sur laquelle nous reviendrons.

Une particule pourrait certes gagner de l'énergie en tombant dans un puits de potentiel gravitationnel profond, mais pour participer au rayonnement cosmique ambiant, libre dans le milieu interstellaire, il lui faudrait sortir du puits et ce faisant abandonner toute l'énergie gagnée. La seule force pouvant agir efficacement pour accélérer une particule est la force de Lorentz,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , d'où il découle que l'accélération ne concerne que les particules chargées. Les particules énergétiques neutres, comme les neutrons, les photons ou les neutrinos, sont donc nécessairement des particules secondaires, produites par l'interaction des protons ou des noyaux énergétiques avec le milieu ambiant (cf. les cours de Jürgen Kienner, Alexandre Marcowith et Vincent Tatischeff).

Les champs électromagnétiques sont donc responsables de l'accélération des particules. Mais dans le milieu interstellaire, le champ électrique moyen est toujours nul,  $\langle E \rangle = 0$ , car le gaz ionisé que l'on rencontre dans les milieux chauds est presque parfaitement conducteur et globalement neutre. Il faut donc plutôt s'en remettre à d'éventuels champs électriques transitoires, comme les reconnections magnétiques accompagnant les éruptions solaires peuvent en produire, par exemple. Les ondes magnétohydrodynamiques rencontrées dans les plasmas interstellaires consistent également, par définition, en des variations locales et oscillantes des champs, pouvant exercer des forces transitoires. La nature produit enfin des champs électriques durables dans de véritables machines électrostatiques, ou machines à induction, au voisinage des étoiles à neutrons ou des trous noirs accrétants.

En ce qui concerne les champs magnétiques, ils sont omniprésents dans l'univers, ce qui constitue d'ailleurs un des problèmes astrophysiques fondamentaux non résolus à ce jour (voir le cours de Katia Ferrière). Outre les étoiles, les disques d'accrétion, les jets, etc., une part impor-

tante du gaz de notre Galaxie est composée de plasma magnétisé. Il est remarquable que la densité d'énergie magnétique dans le milieu interstellaire soit comparable à celle du rayonnement cosmique, ainsi d'ailleurs qu'à celle des photons de la lumière visible et du rayonnement de fond cosmologique (CMB) :

$$\varepsilon_B \sim \varepsilon_{\text{CR}} \sim \varepsilon_{\text{CMB}} \sim \varepsilon_{\text{opt}} \sim 1 \text{ ev/cm}^3. \quad (1)$$

L'équipartition approximative entre le rayonnement cosmique et le champ magnétique n'est probablement pas une coïncidence, et témoigne d'une interaction énergétiquement significative entre ces deux composantes essentielles du milieu interstellaire. En réalité, le confinement des rayons cosmiques dans la Galaxie étant assuré par les champs magnétiques (cf. cours de David Maurin et Richard Taillet), on comprend que la densité d'énergie des premiers ne saurait être très supérieure à celle des seconds. Inversement, si elle était très inférieure, les champs magnétiques n'auraient aucune peine à confiner les rayons cosmiques, qui pourraient alors s'accumuler jusqu'à atteindre une densité d'énergie significative. La quasi-identité  $\varepsilon_B \sim \varepsilon_{\text{CR}}$  semble donc plutôt liée à la propagation des rayons cosmiques qu'à leur accélération. Mais une chose n'en empêche pas une autre, et l'idée d'accélérer les particules en puisant dans le réservoir magnétique ambiant n'est pas nouvelle. Elle sous-tend la plupart des mécanismes astrophysiques d'accélération, et notamment les mécanismes de Fermi.

Il y a diverses façons de produire des champs magnétiques dans le milieu interstellaire (cf. cours de Katia Ferrière), mais nous nous contenterons ici de mentionner que les mouvements à grande échelle des milieux ionisés favorisent la croissance de modes magnétohydrodynamiques (MHD). En particulier, la turbulence hydrodynamique et les instabilités associées aux ondes de choc des supernovæ génèrent des inhomogénéités dans le champ magnétique ainsi que des *ondes plasma* à diverses échelles, assimilées à de la *turbulence magnétique*.

La conservation du flux magnétique implique également l'accroissement de l'intensité du champ  $\vec{B}$  dans les nuages denses.

Enfin, un ingrédient essentiel des modèles d'accélération que nous évoquerons est l'instabilité de *streaming*<sup>1</sup>, par laquelle un faisceau de particules chargées (par exemple une distribution anisotrope de rayons cosmiques) dans un plasma magnétisé peut créer et amplifier des ondes MHD, et notamment des ondes d'Alfvén.

Nous retiendrons ici que l'équipartition énergétique semble être atteinte dans de nombreux cas, ce qui indique que les échanges d'énergie

---

<sup>1</sup>qu'on traduit généralement par "instabilité de faisceau"...

entre particules individuelles et structures macroscopiques sont non seulement possibles, mais efficaces. Ainsi, derrière une onde de choc par exemple, les densités d'énergie thermique, cinétique et magnétique sont du même ordre de grandeur, et sont également comparables à la densité d'énergie des particules énergétiques. Si des particules peuvent interagir individuellement avec des structures macroscopiques, on comprend alors que le "processus d'équipartition" correspondant leur permette d'acquérir des énergies extrêmement élevées. C'est l'essence du mécanisme original proposé par Fermi en 1949, que nous exposons ci-dessous.

Auparavant, il convient de résoudre un paradoxe. Comment se peut-il que les champs magnétiques jouent un rôle primordial dans l'accélération des particules, alors que la force magnétique, comme chacun sait, ne travaille pas<sup>2</sup>? La réponse est qu'en réalité les particules tirent avantage des variations temporelles du champ magnétique, qui, en vertu de la loi de Maxwell-Faraday,  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ , font apparaître des champs électriques transitoires qui, eux, peuvent communiquer de l'énergie aux particules. Par ailleurs, la Relativité nous enseigne que les lois de transformation du tenseur électromagnétique lors d'un changement de référentiel peuvent faire apparaître un champ électrostatique à partir d'un champ magnétique pur :  $\mathbf{E}' = \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Dans un processus d'accélération quelconque, il sera donc toujours possible, en principe, d'identifier le champ électrique qui *travaille* effectivement. Nous en donnerons une illustration dans la section 3.3. Mais une description en termes de champs magnétiques s'avère souvent à la fois plus simple et plus intuitive, notamment parce que, comme nous l'avons dit, les champs électriques sont généralement nuls dans les référentiels locaux naturels où le milieu interstellaire est au repos.

### 3. Le modèle des "nuages magnétiques" : Fermi, 1949

En 1949, le génial Enrico Fermi se penche sur le problème de l'origine des rayons cosmiques et propose une solution riche d'intuitions physiques originales, qui, si elle se révélera finalement incapable de rendre compte des propriétés du rayonnement cosmique de manière satisfaisante, n'en constituera pas moins la base de nombreux modèles ultérieurs, incluant le fameux modèle d'accélération diffusive par onde de choc.

L'idée de Fermi est que des particules chargées énergétiques se propageant dans la Galaxie peuvent interagir avec des "nuages magnétiques" (ou "magnétisés") présents dans le milieu interstellaire et échanger avec

---

<sup>2</sup>De fait,  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$ .

eux de l'énergie. Ces nuages magnétiques sont une idéalisation des nuages de matière relativement denses que l'on rencontre communément dans la Galaxie, et dans lesquels le champ magnétique est significativement plus élevé que dans le reste du milieu interstellaire (une raison simple en est la conservation du flux magnétique,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , lors de leur formation par compression ou par effondrement). Comme tout processus d'échange d'énergie entre degrés de libertés physiques, ces interactions peuvent conduire en principe à une équipartition entre la population des rayons cosmiques et la population des nuages magnétiques, faisant ici office, en quelque sorte, de "superparticules" presque infiniment massives.

Il va de soi, alors, que si les degrés de liberté de translation des rayons cosmiques se voient attribuer autant d'énergie que ceux des nuages, leur énergie sera proprement colossale ! Il faut toutefois prendre en compte les échelles de temps d'établissement de l'équipartition et de confinement des particules dans la région d'accélération. À première vue, la "mise en équilibre" des nuages magnétiques et des rayons cosmiques devrait conduire ces derniers à adopter un *spectre thermique* d'énergie, contrairement à ce qui observé. Mais il se trouve – et c'est la grande découverte de Fermi, qui demeure au cœur des versions modernes de son mécanisme – que la façon particulière dont la perte de confinement des particules met fin prématurément au processus d'équipartition, conduit à l'établissement d'un spectre d'énergie en loi de puissance, conformément aux observations.

Avant de voir comment s'opère un tel miracle mathématique, utilisons une analogie tennistique pour bien comprendre le principe de ce que nous appellerons l'*accélération par changement de référentiel*.

### 3.1 Une analogie tennistique

Nous l'avons dit, les champs magnétiques ne travaillent pas, et ne peuvent donc pas communiquer de l'énergie aux particules. Si les nuages magnétiques de Fermi y parviennent, c'est en réalité parce qu'ils sont en mouvement, et que ce mouvement induit un champ électrique agissant sur les particules. Pour comprendre comment il est possible, dans la pratique, d'éviter le recours au champ électrique effectif, et raisonner simplement à partir des champs magnétiques, changeons de contexte et considérons le rebond d'une balle de tennis sur un mur (en faisant abstraction de la gravité, pour n'étudier ici que le problème à une dimension).

En supposant que le choc balle-mur soit parfaitement élastique<sup>3</sup>, nous savons tous qu'immédiatement après le choc, la vitesse de la balle de

---

<sup>3</sup>et en négligeant la masse de la balle devant celle de la Terre, avec laquelle le mur est supposé "faire corps" !

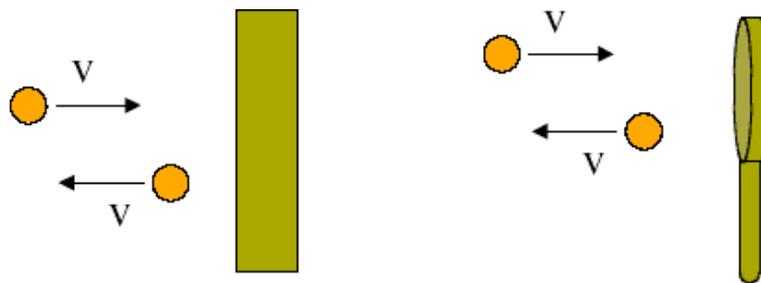


Figure 1.: *Rebond élastique d'une balle sur un mur, ou sur une raquette tenue fermement. La vitesse sortante est identique en norme à la vitesse entrante, et le rebond se fait sans gain d'énergie.*

tennis est égale en norme et opposée en direction à celle immédiatement avant le choc (voir Fig. 1). L'énergie de la balle est donc également inchangée : le rebond ne fournit ni ne prélève aucune énergie ! De même, une balle qui rebondit simplement sur une raquette maintenue fermement, pour éviter tout recul, ne gagne pas d'énergie.

Comment faire, dans ces conditions, pour jouer au tennis et donc, à un moment ou à un autre, accélérer la balle ? Il suffit bien sûr de la frapper, c'est-à-dire de donner une vitesse à la raquette, opposée à la vitesse incidente de la balle (voir Fig. 2). Dans le référentiel de la raquette (supposée maintenue par un bras ferme), le rebond ne s'en fait pas moins sans gain d'énergie. Mais par un double changement de référentiel, il apparaît que la balle acquiert de l'énergie dans le référentiel du court de tennis.

Soit  $v$  la vitesse de la balle par rapport au court de tennis, et  $V$  celle de la raquette, dans la direction opposée. Avant la frappe, la vitesse de la balle *par rapport à la raquette* ne vaut pas  $v$ , bien sûr, mais  $v + V$ . La balle se retrouve donc artificiellement, par changement de référentiel, avec plus d'énergie cinétique. Après la frappe, qui dans le référentiel de la raquette s'effectue, comme précédemment, sans changement d'énergie, la vitesse de la balle par rapport à la raquette vaut toujours  $v + V$ . Mais puisque la vitesse a changé de sens, le changement de référentiel ramenant dans le référentiel du court de tennis est à nouveau favorable à la balle, qui acquiert après la frappe la vitesse  $v + 2V$ . Finalement, la balle aura bien gagné de l'énergie lors du "rebond" sur la raquette en mouvement, alors que le choc est parfaitement élastique.

Cette astuce pourrait sembler simpliste, voire naïve, mais c'est bel et bien l'essence du mécanisme de Fermi, que l'on peut se représenter de manière imagée comme un mécanisme d'accélération "par changement de référentiel".

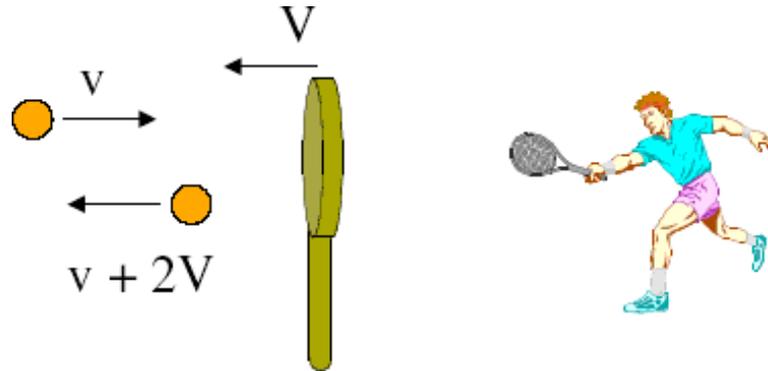
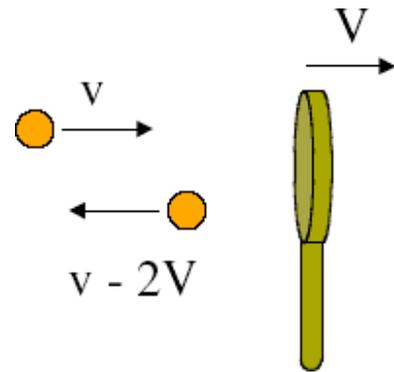


Figure 2.: *Coup frappé* : le rebond élastique d'une balle de tennis sur une raquette en mouvement conserve la vitesse (et donc l'énergie) de la balle dans le référentiel de la raquette, ce qui implique un gain d'énergie dans le référentiel du court de tennis.

Bien sûr, la *décélération* par changement de référentiel est également possible, de manière parfaitement symétrique. C'est le principe de l'amortie, au tennis (voir Fig. 3). Si la balle rebondit sur une raquette se déplaçant cette fois dans le même sens qu'elle (mais moins vite, pour pouvoir être rattrapée!), sa vitesse par rapport à la raquette est réduite à  $v - V$ . Après l'amortie, qui ne modifie pas la vitesse de la balle par rapport à la raquette, le second changement de référentiel porte la vitesse de la balle *par rapport au court de tennis* à  $v - 2V$ .<sup>4</sup>



**Figure 3.:** Amortie : rebond d'une balle sur une raquette en "mouvement fuyant", conduisant à une perte d'énergie cinétique.

<sup>4</sup>En réalité, l'amortie se pratique le plus souvent avec un bras imparfaitement ferme, en laissant la raquette et le bras reculer dans le référentiel initial de la raquette. Le choc balle-raquette est rendu inélastique, le bras et le poignet du joueur *amortissant* le choc en dissipant une partie de l'énergie incidente, comme un matelas peut amortir une chute : c'est le fameux "toucher" de balle"...

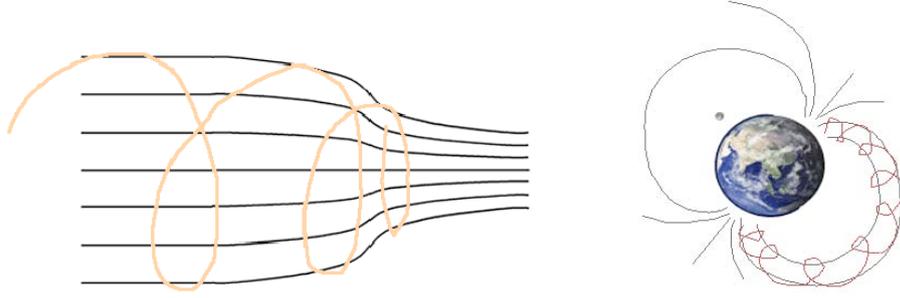


Figure 4.: *Effet de bouteille magnétique.* Lorsque les particules spiralant autour des lignes de champ magnétique atteignent une région où le champ s'intensifie (les lignes de champs se resserrent), leur mouvement longitudinal ralentit, jusqu'à s'annuler si le 'pitch-angle' est suffisamment grand.

### 3.2 Le modèle de Fermi

Dans le cas du modèle de Fermi, les balles de tennis sont les particules chargées énergétiques, et les raquettes, les nuages magnétiques. Comme nous l'avons indiqué, les chocs directs sont tout à fait improbables dans le milieu interstellaire, en raison de l'extrême raréfaction du gaz. Si les particules chargées peuvent "rebondir" sur les nuages, c'est bien sûr par le biais des champs magnétiques.

Nous illustrerons ces interactions par deux exemples : la *bouteille magnétique* (Fig. 4) et le *mur magnétique* (Fig. 5).

Dans le premier exemple, une particule chargée poursuit un mouvement simple de spirale autour des lignes de champ magnétique, dans une région où ce-dernier est homogène. Ce mouvement est la composition d'une translation parallèle aux lignes de champs, à la vitesse  $v_{\parallel}$ , et d'une rotation de Larmor à la vitesse  $v_{\perp}$ . Lorsque la particule gagne une région où le champ s'intensifie, les lignes de champs se resserrent, et sur le tube de champ autour duquel s'enroule la trajectoire, une composante radiale centripète,  $\mathbf{B}_r$ , apparaît. En coordonnées cylindriques, avec l'axe du tube de champ comme axe des  $z$ , la condition  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  s'écrit  $\frac{1}{r}\partial(rB_r)/\partial r + \frac{1}{r}\partial B_{\theta}/\partial \theta + \partial B_z/\partial z = 0$ , d'où l'on tire ( $B_{\theta} = 0$ ) :  $B_r = -\frac{r}{2}\partial B_z/\partial z$ . Il en résulte une force de Lorentz  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  dont la composante parallèle à l'axe  $Oz$  s'écrit :

$$F_{\parallel} = qv_{\perp}B_r = -qv_{\perp}\frac{1}{2}\frac{mv_{\perp}}{qB}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu_{\text{ad}}\frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (2)$$

où l'on a utilisé l'expression du rayon de Larmor,  $r_L = mv_{\perp}/qB$ , et celle du *premier invariant adiabatique*<sup>5</sup>,  $\mu_{\text{ad}} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2/B$  (pour cet exercice d'illustration, on se place dans le cas non relativiste). On voit donc que la force exercée sur la particule est opposée au gradient du champ. Si  $\mu_{\text{ad}}$  est suffisamment grand, cette force finira par annuler la composante parallèle de la vitesse, et la particule rebrousse chemin, "réfléchie" par le goulot magnétique<sup>6</sup>.

Ce phénomène est bien connu au voisinage de la Terre, où les particules chargées issues du vent solaire sont piégées dans les ceintures de radiation. Elles y suivent les tubes de champs en oscillant d'un pôle à l'autre, jusqu'à échapper finalement au confinement magnétique lorsque leur pitch-angle devient suffisamment petit, et finir leur course en aurores polaires dans l'atmosphère terrestre.

Qu'est-ce que le *pitch-angle*? C'est une notion qui nous sera utile par la suite. On pourrait traduire le terme anglais par "angle d'enroulement" (certains préfèrent "angle d'attaque"). Il s'agit de l'angle que fait la trajectoire d'une particule avec la direction du champ magnétique local. Dans un champ magnétique régulier, le pitch-angle, noté généralement  $\alpha$ , demeure constant : c'est tout simplement l'angle d'ouverture de la spirale de Larmor. Sa tangente vaut, par définition,  $\tan \alpha = v_{\perp}/v_{\parallel}$ , et l'on note habituellement  $\mu \equiv \cos \alpha$ . Si le pitch-angle est nul, les particules suivent simplement les lignes de champ (sans mouvement de rotation), et la réflexion magnétique décrite ci-dessus n'a pas lieu, même dans un fort gradient de champ. Dans une configuration de champ donnée, il y a généralement un pitch-angle limite en dessous duquel le confinement échoue.

Venons-en au second exemple : celui du mur magnétique. Si une particule se propage dans un milieu de champ nul – en ligne droite, donc – et pénètre dans une région où le champ est non nul, sa trajectoire s'incurve pour décrire un arc de cercle (en projection dans un plan orthogonal au champ), de rayon de giration  $r_g = mv_{\perp}/qB$ , interrompu lorsque la par-

---

<sup>5</sup>cf. cours de Guy Pelletier

<sup>6</sup>Pour ceux qui préfèrent les arguments de haut niveau – ce qui n'est généralement pas mon cas! – on peut présenter cet effet (la réflexion des particules sur un goulot magnétique) comme une conséquence directe de la conservation du premier invariant adiabatique (valable si le champ magnétique varie peu sur une longueur comparable au rayon de Larmor des particules). En effet, non seulement  $\mu_{\text{ad}} = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2/B$  est conservé, mais l'énergie totale,  $E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}m(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)$ , l'est aussi, puisque le champ B est statique et qu'il n'y a donc pas de champ électrique induit. Si donc le champ B augmente,  $v_{\perp}$  doit augmenter pour assurer l'invariance de  $\mu_{\text{ad}}$ , et en conséquence  $v_{\parallel}$  doit diminuer. En écrivant  $v_{\parallel}^2 = 2(E_{\text{tot}} - \mu_{\text{ad}}B)/m$ , on voit que la vitesse parallèle doit s'annuler lorsque l'intensité du champ B atteint la valeur  $E_{\text{tot}}/\mu_{\text{ad}}$ .

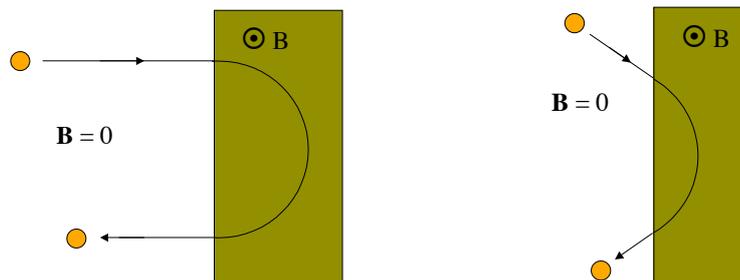


Figure 5.: *Rebond sur un mur magnétique. La trajectoire d'une particule chargée est rectiligne en l'absence de champ magnétique, et circulaire dans la région où le champ est non nul. Dans cette version idéalisée, l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence.*

ticule quitte la zone couverte par le champ. Un tel nuage magnétique réfléchit donc les particules, comme indiqué sur la Fig. 5.

Supposons maintenant que le mur magnétique (un nuage interstellaire magnétisé) soit en mouvement. Le calcul de l'énergie de la particule après réflexion peut se faire par un double changement de référentiel, comme dans le cas de la balle de tennis, étant bien entendu que l'énergie de la particule dans le référentiel du nuage magnétique ne saurait varier au cours de la réflexion, puisque les champs magnétiques ne travaillent pas. Le résultat est alors qualitativement évident : si la "collision" particule/nuage est frontale (le nuage vient à la rencontre de la particule), la particule gagnera de l'énergie ; si au contraire elle est *fuyante*, la particule perdra de l'énergie.

Ce qui précède suffit à comprendre l'essence du modèle d'accélération de Fermi, dont la structure logique peut s'exposer ainsi :

1. les particules chargées interagissent avec des nuages magnétiques qui peuvent les réfléchir ;
2. ces nuages magnétiques sont en mouvement désordonné dans le milieu interstellaire ;
3. quand une particule est réfléchi sur un "miroir magnétique" venant vers elle, dans une collision frontale, elle gagne de l'énergie ;
4. quand une particule est réfléchi sur un miroir magnétique s'éloignant d'elle, dans une collision fuyante, elle perd de l'énergie ;
5. les collisions frontales sont plus fréquentes que les collisions fuyantes, de sorte qu'en moyenne les gains d'énergie l'emportent.

Pourquoi les collisions frontales sont-elles plus fréquentes. Eh bien précisément parce que dans ce cas, les nuages viennent au devant des

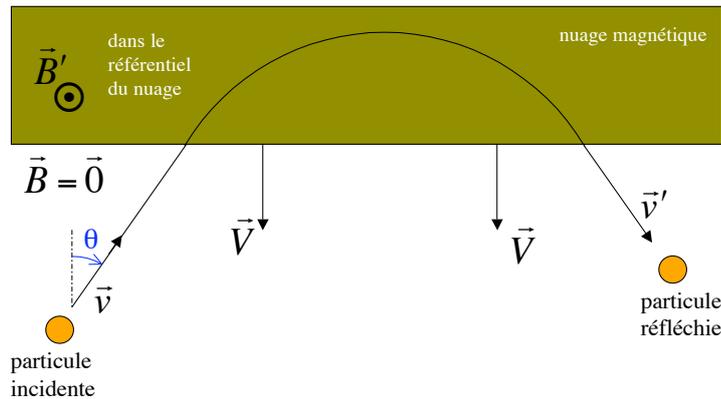


Figure 6.: *Réflexion d'une particule chargée par un mur magnétique en mouvement (ici pour une charge positive).*

particules, tandis que lors d'un choc fuyant, les particules doivent rattraper les nuages, ce qui prend en moyenne un peu plus de temps. La fréquence des rencontres est proportionnelle à la vitesse relative des particules et des nuages magnétiques, et se trouve donc modulée avec l'angle d'entrée dans le nuage suivant une amplitude relative de l'ordre de  $V/v$ , où  $V$  est la vitesse du nuage, et  $v$  celle de la particule. Cette propriété est en réalité très intuitive. Supposons que nous roulions sur une autoroute présentant un trafic aussi dense dans les sens. N'est-il pas évident que nous croiserons plus de voitures venant en sens inverse sur l'autre voie, que nous n'en dépasserons sur notre chaussée ?

Avant d'aborder l'étude quantitative des mécanismes de Fermi, que nous mènerons suivant l'approche des "changements de référentiel", nous allons montrer dans le cas du mur magnétique idéal comment s'établit en pratique l'équivalence entre cette approche et l'approche microscopique faisant appel au champ électrique induit.

### 3.3 *Changement de référentiel ou champ électrique induit : deux approches équivalentes*

Reprenons l'exemple du mur magnétique idéalisé, dans lequel une particule de charge  $q$  en mouvement rectiligne dans une région sans champ pénètre dans un nuage magnétique sous une incidence  $\theta$ , dans un plan perpendiculaire à la direction du champ, supposé uniforme, régnant dans le nuage (voir Fig. 6).

*Double changement de référentiel* Nous allons calculer l'accroissement d'énergie de la particule dans le référentiel Galactique,  $\mathcal{R}_G$ , dans lequel le nuage magnétique est animé d'une vitesse  $\mathbf{V}$ . Dans ce référentiel, la particule a initialement l'énergie  $E_{\text{in}}$  et l'impulsion  $p_{\text{in}}$ , distribuée en une composante parallèle à  $\mathbf{V}$ ,  $p_{\text{in}\parallel}$  ( $< 0$ , pour un choc frontal), et une composante perpendiculaire,  $p_{\text{in}\perp}$ . Le passage au référentiel du nuage,  $\mathcal{R}_N$ , s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} E'_{\text{in}} = \gamma(E_{\text{in}} - p_{\text{in}\parallel}V) \\ p'_{\text{in}\parallel} = \gamma(p_{\text{in}\parallel} - \frac{V}{c^2}E_{\text{in}}) \end{cases} \quad (3)$$

Telles sont les valeurs de l'énergie et de l'impulsion dans le référentiel du nuage lorsque la particule y entre. Lorsqu'elle en sort, l'énergie est inchangée,  $E'_{\text{out}} = E'_{\text{in}}$ , de même que l'impulsion totale, mais la composante parallèle de l'impulsion est retournée,  $p'_{\text{out}\parallel} = -p'_{\text{in}\parallel}$  (tandis que  $p'_{\text{out}\perp} = p'_{\text{in}\perp}$ ). Le retour au référentiel Galactique donne alors :

$$\begin{cases} E_{\text{out}} = \gamma(E'_{\text{out}} + p'_{\text{out}\parallel}V) \\ p_{\text{out}\parallel} = \gamma(p'_{\text{out}\parallel} + \frac{V}{c^2}E'_{\text{out}}) \end{cases} \quad (4)$$

La première égalité nous suffit à exprimer  $E_{\text{out}}$  en fonction de  $E_{\text{in}}$  :

$$E_{\text{out}} = \gamma^2[E_{\text{in}}(1 + \frac{V^2}{c^2}) - 2p_{\text{in}\parallel}V]. \quad (5)$$

Au premier ordre en  $V/c$ , et en faisant apparaître l'angle d'incidence  $\theta = -(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{V}})$  (cf. Fig. 6), tel que  $p_{\parallel} = -Ev \cos \theta / c^2$ , on obtient donc :

$$E_{\text{out}} = E_{\text{in}}(1 + \frac{2vV \cos \theta}{c^2}), \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta E}{E} = -2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}. \quad (6)$$

Cette expression nous permet de noter : 1) que le gain d'énergie est proportionnel à l'énergie initiale (du moins pour des particules relativistes où  $v \simeq c$ ), 2) qu'il est bien positif si le choc est frontal ( $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{V}$  antiparallèles), et négatif dans le cas contraire, et 3) que  $\Delta E$  est indépendant de la valeur du champ magnétique et de la charge de la particule. Ce dernier résultat, qui n'est pas évident *a priori* si on considère le processus microscopique sous-jacent, est trivial dans l'approche des changements de référentiel, puisque ceux-ci ne font apparaître que la vitesse du nuage.

*Action du champ électrique induit* Voyons maintenant comment on obtient l'expression du gain d'énergie par un calcul direct, faisant intervenir le champ électrique induit dans le référentiel Galactique par le mouvement du nuage magnétique. Pour obtenir son expression, il suffit d'appliquer la formule de changement de référentiel du tenseur

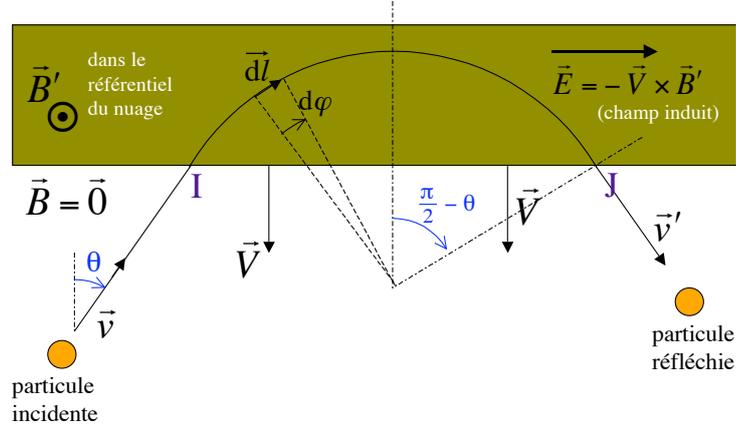


Figure 7.: Action du champ électrique induit lors de la réflexion d'une particule chargée par un nuage magnétique en mouvement.

électromagnétique, qui se traduit par  $\mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{V} \times \mathbf{B}'_\perp)$ . Dans  $\mathcal{R}_N$ , le champ électrique est nul, et au premier ordre en  $V/c$ , on a donc ( $\gamma \simeq 1$ ) :  $\mathbf{E}_\perp = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}'_\perp$  (cf. Fig. 7).

Pour calculer le gain d'énergie de la particule, il suffit d'intégrer le travail de la force électrique produite par ce champ le long de la trajectoire circulaire. On a :

$$\Delta E = \int_{\text{arc de cercle}} \mathbf{F}_{\text{el}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{arc}} q\mathbf{E}_\perp \cdot \mathbf{u}_\varphi r_g d\varphi. \quad (7)$$

En projection le long du champ  $\mathbf{E}$ , le déplacement élémentaire s'intègre trivialement sur l'arc de cercle, pour donner la longueur IJ, qui n'est rien d'autre que  $2r_g \sin(\pi/2 - \theta) = 2r_g \cos \theta$ , où  $r_g = p/qB$  est le rayon de giration, déjà mentionné. En remplaçant le champ électrique induit par sa valeur, et en remarquant que  $p = Ev/c$ , on obtient donc finalement :

$$\Delta E = 2qVB \cos \theta \frac{p}{qB} = 2E \frac{vV \cos \theta}{c^2}, \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta E}{E} = -2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}}{c^2}. \quad (8)$$

Les deux approches donnent donc un résultat identique<sup>7</sup>, ce qui est heureux ! On voit bien, dans ce qui précède, comment disparaissent finalement la charge et l'intensité du champ magnétique, qui sont pourtant des

<sup>7</sup>À ceux qui souhaiteraient pousser le calcul au-delà du premier ordre en  $V/c$ , je signale qu'il ne faut plus alors négliger le déplacement du nuage pendant le temps que dure le renversement de la vitesse de la particule le long de l'arc de cercle. À cet ordre, l'angle de réflexion n'est pas strictement égal à l'angle d'incidence...

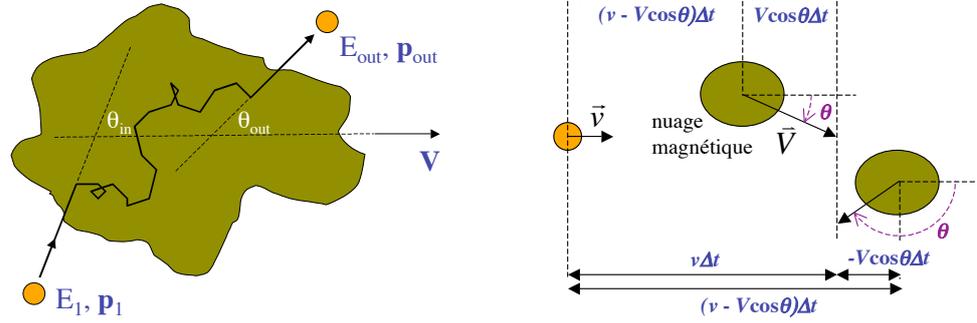


Figure 8.: a) *Isotropisation des trajectoires au sein des nuages*; b) *schéma explicitant le calcul de la distribution stochastique des angles d'incidence des particules dans les nuages.*

ingrédients essentiels du calcul. L'élément clé de ce petit miracle n'est rien d'autre que le rayon de giration. D'une manière générale, dans tous les calculs sur le rayonnement cosmique, c'est cette grandeur qui synthétise toute l'information électromagnétique gouvernant la trajectoire des particules. À rayon de giration donné, toutes les particules se comportent de manière identique (si on excepte bien sûr les pertes d'énergie liées aux phénomènes nucléaires, cf. cours de J. Kiener).

Nous nous en tiendrons désormais à l'approche "par changement de référentiel", qui est généralement plus naturelle et plus aisée, puisqu'elle ne se soucie aucunement des champs électriques induits, pourtant responsables des changements d'énergie des particules.

### 3.4 Calcul de l'accélération de Fermi du second ordre

Dans une situation un peu moins idéalisée que celle des miroirs magnétiques de la section précédente, on peut considérer des nuages magnétisés en mouvement, emportant avec eux des champs qui ne sont pas nécessairement homogènes, mais qui peuvent donner lieu à des déflexions multiples des particules. La figure 8a montre une telle situation, qui représente une généralisation simple du modèle original de Fermi, l'hypothèse centrale du calcul demeurant que, dans le référentiel des nuages, les particules ne gagnent ni ne perdent d'énergie, dans la mesure où les champs électriques induits peuvent y être considérés comme négligeables.

Reprenons le calcul du double changement de référentiel. Si  $\theta_{in} = \widehat{(\mathbf{v}_{in}, \mathbf{V})}_G$  est l'angle d'entrée de la particule dans le nuage, mesuré dans le référentiel Galactique, et si  $\theta'_{out} = \widehat{(\mathbf{v}_{out}, \mathbf{V})}_N$  est l'angle de sortie de la

particule, mesuré dans le référentiel du nuage, on peut écrire :

$$\begin{cases} E'_{\text{in}} = \gamma E_{\text{in}}(1 - \beta \cos \theta_{\text{in}}) \\ E'_{\text{out}} = \gamma E'_{\text{out}}(1 + \beta \cos \theta'_{\text{out}}) \end{cases}, \quad (9)$$

d'où l'on tire :

$$E_{\text{out}} = \gamma^2 E_{\text{in}}(1 - \beta \cos \theta_{\text{in}})(1 + \beta \cos \theta'_{\text{out}}), \quad (10)$$

et finalement (avec  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ) :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\beta(\cos \theta'_{\text{out}} - \cos \theta_{\text{in}}) + \beta^2(1 - \cos \theta_{\text{in}} \cos \theta'_{\text{out}})}{1 - \beta^2}. \quad (11)$$

Pour obtenir l'accroissement d'énergie moyen, lors de la rencontre d'une particule avec un nuage magnétique quelconque dans le milieu interstellaire, il ne reste plus qu'à calculer la moyenne du cosinus des angles d'entrée et de sortie,  $\langle \cos \theta_{\text{in}} \rangle$  et  $\langle \cos \theta'_{\text{out}} \rangle$ . Par hypothèse, la direction des particules est isotropisée dans le nuage, et l'angle de sortie est donc quelconque :  $\langle \cos \theta'_{\text{out}} \rangle = 0$ . L'angle d'entrée, quant à lui, n'est pas distribué uniformément, puisque la fréquence des collisions dépend de la vitesse relative de la particule et du nuage. Reportons-nous à la figure 8b. Si le mouvement des nuages est isotrope dans le milieu interstellaire, et que la densité des nuages faisant un angle  $\theta$  avec la vitesse de la particule est uniforme, on voit sur le schéma que le nombre moyen de nuages rencontrés pendant un temps  $\Delta t$  est proportionnel à  $(v - V \cos \theta)\Delta t$ . La moyenne du cosinus de l'angle d'entrée se calcule donc à partir de la loi de probabilité,  $\mathcal{P}(\theta_{\text{in}}) \propto (v - V \cos \theta_{\text{in}})$  :

$$\langle \cos \theta_{\text{in}} \rangle = \frac{\int_{-1}^1 \cos \theta_{\text{in}}(v - V \cos \theta_{\text{in}})d(\cos \theta_{\text{in}})}{\int_{-1}^1 (v - V \cos \theta_{\text{in}})d(\cos \theta_{\text{in}})} = \frac{-2V/3}{2v} \simeq -\frac{1}{3}\beta, \quad (12)$$

où, dans la dernière égalité,  $\beta = V/c$ , et l'on a supposé que les particules sont relativistes ( $v \simeq c$ ).

En reportant dans l'équation (11), on obtient donc, au premier ordre non nul :

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4}{3} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \simeq \frac{4}{3} \beta^2. \quad (13)$$

La formule ci-dessus contient tout les ingrédients permettant de parler de mécanisme d'*accélération stochastique de Fermi du deuxième ordre* :

- *accélération*, parce que l'accroissement relatif d'énergie est en moyenne positif : c'est la conséquence de l'excès des collisions frontales sur les collision fuyantes ;

- *stochastique*, parce que l'accroissement d'énergie n'est que moyen : certaines particules rencontreront moins souvent des nuages se dirigeant vers elles, et perdront plus d'énergie qu'elles n'en gagnent, tandis que d'autres en gagneront plus que la moyenne ;
- *de Fermi*, parce que l'accroissement d'énergie est proportionnel à l'énergie ( $\Delta E/E$  constant) ;
- *du deuxième ordre*, parce que l'accroissement relatif d'énergie est en  $\beta^2$ .

En moyenne, les particules gagnent donc de l'énergie. Mais à quel rythme ? Quel est le taux d'accélération ? Pour l'évaluer, il suffit d'estimer le temps moyen passé par les particules entre deux collisions,  $\tau_{\text{coll}}$ . Soit  $L$  la distance entre deux nuages le long d'une ligne de champ. La longueur effectivement parcourue par les particules en spiralant autour des lignes de champ dépend de leur pitch-angle :  $\langle \frac{L}{c \cos \alpha} \rangle \simeq 2L/c$ . Finalement, le taux d'accélération par le processus décrit ci-dessus s'écrit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \frac{c}{L} \beta^2 E = \frac{E}{\tau_{\text{acc}}}, \quad \text{avec} \quad \tau_{\text{acc}} \equiv \frac{3}{2} \frac{L}{c} \beta^{-2}. \quad (14)$$

Notons que certains définissent un processus de Fermi comme un processus dans lequel le temps d'accélération est indépendant de  $E$ .

### 3.5 Mécanismes de Fermi et spectres en loi de puissance

Le grand mérite du processus de Fermi est de produire de manière naturelle un spectre en loi de puissance, conformément à ce qu'on observe généralement dans les sources astrophysiques ou dans le milieu interstellaire. Cette particularité est très générale, et s'applique à tout mécanisme satisfaisant les conditions suivantes : 1) le temps d'accélération,  $\tau_{\text{acc}}$ , est indépendant de  $E$ , 2) le temps d'échappement des particules hors de la région d'accélération,  $\tau_{\text{esc}}$ , est indépendant de  $E$ , et 3) un mécanisme d'injection quelconque fournit continûment des particules à une énergie initiale  $E_0$ .

Dans ces conditions, nous pouvons écrire la probabilité d'échappement d'une particule pendant un temps élémentaire  $dt$ , comme  $\mathcal{P}_{\text{esc}} = dt/\tau_{\text{esc}}$ , et la loi d'évolution de l'énergie (moyenne) des particules en fonction du temps comme  $E(t) = E_0 \exp(t/\tau_{\text{acc}})$ . Inversement, on peut dire que les particules ayant une énergie  $E$  sont restées dans la zone d'accélération un temps

$$t(E) = \tau_{\text{acc}} \log(E/E_0). \quad (15)$$

Le spectre d'énergie différentiel des particules accélérées s'obtient alors en faisant valoir que les particules présentes à un instant quelconque

entre  $E$  et  $E + dE$  ont été injectées (à l'énergie  $E_0$ ) entre un temps  $t(E)$  et un temps  $t(E + dE)$  plus tôt. Cela représente un intervalle de temps

$$dt = \frac{dt}{dE} dE = \frac{\tau_{\text{acc}}}{E} dE. \quad (16)$$

Si le taux d'injection des particules est  $\dot{N}_0$ , le nombre de particules injectées pendant  $dt$  est bien évidemment  $\dot{N}_0 dt$ , parmi lesquelles une fraction  $\exp[-t(E)/\tau_{\text{esc}}]$  aura survécu après un temps  $t(E)$ . On obtient donc finalement le nombre de particules présentes entre  $E$  et  $E + dE$  :

$$N(E)dE = \dot{N}_0 \frac{\tau_{\text{acc}}}{E} \exp\left(-\frac{\tau_{\text{acc}} \log(E/E_0)}{\tau_{\text{esc}}}\right) dE, \quad (17)$$

d'où l'on tire le spectre différentiel des particules énergétiques :

$$N(E) = \frac{\dot{N}_0 \tau_{\text{acc}}}{E_0} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{-x}, \quad \text{avec } x = 1 + \frac{\tau_{\text{acc}}}{\tau_{\text{esc}}}. \quad (18)$$

Voilà bien la loi de puissance annoncée !

Compte tenu de nos remarques liminaires sur l'étrangeté de l'existence de distributions non-thermiques de particules, il n'est pas inutile de commenter un peu le résultat que nous venons d'obtenir. Au début de la section 3., nous avons présenté le mécanisme d'interaction entre les particules énergétiques et les nuages magnétiques comme un mécanisme de thermalisation, dans lequel les premières pourraient atteindre des énergies gigantesques. La stochasticité du processus, dans lequel les particules gagnent ou perdent de l'énergie suivant le hasard de leurs interactions élémentaires, confirme l'aspect thermodynamique du processus. Mais comment se fait-il alors que le spectre d'énergie obtenu ne soit pas un spectre thermique ?

La réponse est fournie ci-dessus : le processus de thermalisation n'est simplement pas mené à son terme ! Le confinement des particules ne peut pas être parfait, et celles-ci s'échappent avant d'acquérir une énergie égale à l'énergie moyenne par degré de liberté des nuages (qui serait proprement colossale !). Comme nous venons de le voir, la combinaison d'un gain élémentaire d'énergie proportionnel à l'énergie des particules et d'une probabilité d'échappement par unité de temps indépendante de l'énergie, conduit à l'établissement d'une loi de puissance. Ce type de spectre non thermique apparaît donc comme une étape relativement naturelle (sous les hypothèses de Fermi rappelées ci-dessus) sur la route de la thermalisation. . .

### 3.6 Les problèmes du modèle de Fermi

En dépit de son attrait indéniable, la théorie de Fermi souffre de pathologies rédhibitoires, qu'il est facile de mettre en lumière. Tout d'abord, le temps d'accélération est beaucoup trop long. La vitesse typique des nuages dans le milieu interstellaire est de l'ordre de quelques dizaines de km/s, soit  $\beta \simeq 10^{-4}$ . Comme le processus est du second ordre, en  $\beta^2$ , le gain relatif d'énergie par collision avec les nuages n'est en moyenne pour les particules que de l'ordre de  $10^{-8}$  ! Comme en outre la distance typique entre les nuages est de l'ordre du parsec (soit environ trois années lumières), il faut aux particules près d'un milliard d'années pour seulement tripler leur énergie ! Quand on sait que l'âge typique des rayons cosmiques est de l'ordre de  $10^7$  ans (voir le cours de David Maurin et Richard Taillet), on comprend que le mécanisme de Fermi n'a aucune chance d'expliquer l'origine du rayonnement cosmique<sup>8</sup>.

Un autre problème du modèle original de Fermi est le problème de l'*injection*. À basse énergie, les particules se propageant dans le milieu interstellaire interagissent avec le milieu ambiant et perdent de l'énergie lors d'interactions coulombiennes (cf. cours de J. Kiener). Si la fréquence des collisions entre les particules et les nuages magnétiques est trop faible, les gains d'énergie ne sont pas en mesure de compenser les pertes intervenant entre deux collisions, et le mécanisme d'accélération ne peut pas fonctionner. Fermi en était bien conscient, c'est pourquoi il a proposé qu'un mécanisme différent (les flares solaires, par exemple) injecte préalablement dans le milieu interstellaire des particules à suffisamment haute énergie pour que leurs pertes coulombiennes n'entravent pas le processus. Pour accélérer des protons avec le mécanisme de Fermi, il faudrait les injecter à au moins 200 MeV, ce qui n'est pas rien ! Et pour des noyaux plus lourds, c'est encore pire...

Enfin, si l'on peut se réjouir d'obtenir une loi de puissance assez naturellement, il faut bien convenir que sa pente n'est pas prédite de manière précise. D'après l'Eq. (18), l'indice spectral dépend du rapport entre le temps d'accélération et le temps d'échappement. Le premier dépend de la distance entre les nuages et de leur vitesse typique dans le milieu interstellaire, tandis que le second dépend des conditions de diffusion des particules et de la taille de la région accélératrice. Nul doute qu'on puisse ajuster ces paramètres à loisir pour reproduire n'importe quel spectre observé, mais ce n'est pas très confortable... Et ce qui est plus gênant encore, c'est qu'il n'y a aucune raison *a priori* pour que les spectres d'énergie de particules accélérées dans différentes régions de la Galaxie aient la même pente logarithmique. Chaque région spécifique de-

---

<sup>8</sup>Mais il est vrai qu'à l'époque de Fermi, l'âge des rayons cosmiques était inconnu.

vrait donc déverser dans le milieu interstellaire une composante de rayons cosmiques ayant son propre spectre en loi de puissance, avec son propre indice spectral. Par quel miracle la somme de ces spectres – la combinaison de toutes ces composantes – formerait-elle un spectre lui-même en loi de puissance, conforme aux observations ?

Les raisons indiquées ci-dessus suffisent à faire comprendre pourquoi le modèle original de Fermi ne peut en aucun cas expliquer l'origine du rayonnement cosmique. Il n'en constitue pas moins un mécanisme inévitable dans le milieu interstellaire, qui peut donner lieu à la réaccélération des rayons cosmiques (accélérés initialement d'une autre façon) lors de leur propagation dans la Galaxie. Par ailleurs, il peut aisément se transposer dans des situations astrophysiques où il serait beaucoup plus efficace. Avant d'évoquer les versions modernes de l'accélération stochastique de Fermi du second ordre, remarquons que les points d'achoppement du modèle original révèlent ce qui permettrait de rendre l'accélération plus efficace.

En premier lieu, il faudrait rendre le temps d'accélération plus court. L'équation (14) montre que la petitesse du facteur  $\beta = V/c$  est d'autant plus pénalisante que le mécanisme est du second ordre. Un mécanisme du premier ordre, où le taux d'accélération serait proportionnel à  $\beta$  plutôt qu'à  $\beta^2$ , serait à cet égard très appréciable, surtout si la vitesse des "miroirs magnétiques" (ou ce qui en tiendrait lieu) était un peu moins faible devant la vitesse de la lumière. Par ailleurs, la distance entre les nuages de Fermi est bien trop grande : en réduisant la valeur de  $L$  (ou d'une grandeur équivalente), on pourrait augmenter significativement la fréquence des collisions affectant l'énergie des particules et ainsi, si l'on peut dire, accélérer le mouvement ! Enfin, il serait intéressant d'identifier un mécanisme pour lequel la pente de la loi de puissance serait universelle, de sorte que les rayons cosmiques provenant des différentes régions d'accélération pourraient se mêler les uns aux autres en conservant leur spectre, et en additionnant simplement leur flux. Toutes ces conditions se trouvent satisfaites dans le modèle d'accélération par onde de choc ! (Cf. section 5.)

## 4. Versions modernes de l'accélération de Fermi du second ordre

### 4.1 Ondes plasma et "centres diffuseurs"

À la fin de la section 3.2, nous avons explicité en cinq points la structure logique de l'argument de Fermi, décrivant l'accélération des particules par interactions avec des miroirs magnétiques. Les versions

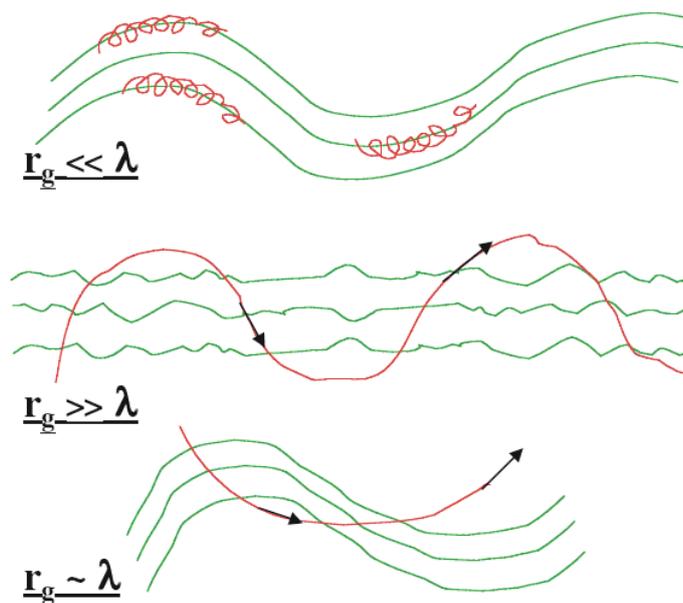


Figure 9.: Représentation schématique de l’interaction d’une particule chargée avec des inhomogénéités magnétiques, correspondant à des perturbations des lignes de champ. Respectivement, de haut en bas, pour un rayon de giration très inférieur, très supérieur, et comparable à la longueur d’onde des perturbations. Dans ce dernier cas, une interaction résonante a lieu, qui modifie significativement le pitch-angle de la particule, et autorise un transfert d’énergie et une diffusion spatiale.

modernes de ce processus s’obtiennent simplement en remplaçant la notion de “nuage magnétique” par celle de *centre diffuseur*.

Un centre diffuseur est simplement une structure électromagnétique pouvant interagir avec les particules chargées. Contrairement à l’image grossière développée plus haut, dans le milieu interstellaire le champ magnétique n’est pas ordonné en nuages magnétisés séparés par des régions de champ nul, mais montre une structure chaotique dont la description peut se faire de manière analogue à la turbulence hydrodynamique. Les inhomogénéités du champ se comportent alors comme autant de “miroirs magnétiques”, dès l’instant qu’elles peuvent conduire à des déflexions significatives des particules.

En pratique, les particules chargées interagissent ainsi avec les champs MHD stochastiques, décrits comme une superposition turbulente d’ondes plasma. Ces interactions et leurs effets sur le transport des particules énergétiques sont étudiées (aux niveaux microscopique et macro-

scopique) dans le cours de Guy Pelletier (dans ce même volume). Nous nous bornerons ici à donner quelques idées générales, en rappelant l'importance des interactions résonantes, qui ont lieu lorsque le mouvement de giration des particules est "accordé" aux ondes plasma.

Ceci est illustré sur la figure 9, schématisant le mouvement d'une particule chargée autour des lignes de champ. Les inhomogénéités magnétiques correspondent en effet à des perturbations des lignes de champ. Comme la figure tente de l'illustrer, si l'échelle (la longueur d'onde) des perturbations est grande devant le rayon de giration des particules, celles-ci se contentent de suivre les lignes de champ en ajustant simplement leur pitch-angle pour conserver leur invariant adiabatique. Si à l'inverse les lignes de champs sont perturbées sur des échelles petites devant le rayon de giration, les particules suivront le champ moyen sans être fortement influencées par les inhomogénéités. La résonance apparaît lorsque le mouvement orbital des particules coïncide avec la longueur des perturbations magnétiques. Dans ce cas, pour le dire très naïvement, les particules commençant à tourner autour d'un champ donné se retrouvent, après un demi-tour, autour d'un champ décalé, et si la phase du champ est accordée sur le mouvement orbital, des effets de grande ampleur peuvent avoir lieu, induisant à la fois une modification du pitch-angle et une dérive du centre de guidage (le point virtuel autour duquel les particules tournent, dans leur mouvement de Larmor, dérive d'une ligne de champ à l'autre).

Cette représentation intuitive, mais naïve, peut être rendue plus solide en étudiant l'interaction microscopique des particules avec les ondes MHD (cf. cours de Guy Pelletier dans ce volume). Rappelons rapidement qu'il existe deux types d'ondes plasma : les ondes d'Alfvén et les ondes magnétosoniques.

*Les ondes d'Alfvén* Les ondes d'Alfvén sont des ondes transverses, polarisées circulairement, non compressives (du moins à faible amplitude). Elles perturbent les lignes de champ magnétique un peu comme des ondes mécaniques peuvent perturber une corde tendue, la force de rappel étant ici assurée par la "tension magnétique",  $B^2/\mu_0$ . Si  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  avec le champ magnétique permanent  $\mathbf{B}_0$ , et si l'on note  $k_{\parallel} \equiv k \cos \theta$ , la relation de dispersion pour les ondes d'Alfvén s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{k_{\parallel}^2 v_A^2}{1 + v_A^2/c^2} \simeq k_{\parallel}^2 v_A^2, \quad (19)$$

où  $v_A$  est la vitesse d'Alfvén, donnée pour une densité de masse ambiante  $\rho$  (ou  $n_0$ , exprimée en protons par  $\text{cm}^3$ ) par :

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}} \sim (23 \text{ km/s}) B_{\mu\text{G}} n_0^{-1/2}. \quad (20)$$

Si on se souvient que la densité d'énergie magnétique est donnée par  $\epsilon_{\text{magn}} = B_0^2/2\mu_0$ , on voit que la vitesse d'Alfvén est donnée par  $v_A^2 \sim \epsilon_{\text{magn}}/\rho$ , tout comme la vitesse du son s'écrit  $v_{\text{son}}^2 \sim \epsilon_{\text{th}}/\rho$ , à partir de la densité d'énergie thermique du gaz. Dans un milieu en équipartition, la vitesse d'Alfvén sera donc toujours comparable à la vitesse du son (mais les facteurs d'ordre unité peuvent avoir de l'importance).

Notons également que la vitesse de groupe  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$  est toujours parallèle aux lignes du champ  $\mathbf{B}_0$ , même si ce n'est pas vrai pour la vitesse de phase. En revanche, les ondes d'Alfvén ne se propagent pas orthogonalement à  $\mathbf{B}_0$ , c'est-à-dire pour  $\theta = \pi/2$ . Elles sont donc essentiellement anisotropes, si le champ lui-même n'est pas isotrope. Enfin, il faut noter qu'elles n'existent qu'à des fréquences telles que  $\omega \leq \Omega_p$ , où  $\Omega_p = eB/m_p$  est la fréquence cyclotron des protons ambiants (des modes "siffleurs" existent néanmoins pour  $\Omega_p < \omega < \Omega_e$ ). Il y a donc une longueur d'onde minimale au dessous de laquelle les interactions résonantes sont impossibles, et en particulier les électrons de trop faible énergie ne peuvent interagir de manière résonante<sup>9</sup>.

*Les ondes magnétosoniques* Les ondes magnétosoniques sont longitudinales et se propagent de manière préférentielle perpendiculairement aux lignes de champ. Contrairement aux ondes d'Alfvén, elles sont compressives, et la force de rappel est justement la pression totale ambiante, c'est-à-dire la somme de la pression cinétique du plasma et de la pression magnétique. Ces ondes sont donc analogues aux ondes sonores rencontrées dans les gaz neutres, d'où leur nom.

La relation de dispersion :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{1 + v_A^2/c^2} \left[ v_A^2 + v_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta} \right] \quad (21)$$

montre qu'il existe en réalité deux branches ou modes distincts parmi les ondes magnétosoniques, un mode rapide (signe +) et un mode lent (signe -).

D'un point de vue physique, les deux composantes, cinétique et magnétique, de la pression agissent en phase dans le mode rapide (de sorte que  $v_A$  et  $v_s$  "s'ajoutent"), et en opposition de phase dans le mode lent. On remarque également que le mode lent ne se propage pas du tout pour  $\theta = \pi/2$ , lorsque le mode rapide atteint au contraire sa vitesse maximale.

---

<sup>9</sup>Dans un plasma relativement dense ( $n \gtrsim 10^{-3} B_{\mu\text{G}}^2 \text{ cm}^{-3}$ ), la vitesse parallèle des électrons doit vérifier  $v_{\parallel} > v_A (m_p/m_e)^{1/2}$ , et dans un plasma de faible densité, ils doivent être au moins faiblement relativistes :  $\gamma_{\text{min}} = \frac{m_p v_A}{m_e c}$ .

*Principales interactions résonnantes* Comme nous l'avons déjà indiqué, les ondes MHD affectent les particules relativistes par l'intermédiaire de leurs champs électriques fluctuants. L'influence est alors la plus grande lorsqu'il y a résonance, c'est-à-dire lorsque les vitesses de l'onde et de la particule sont bien ajustées. Dans le cas des ondes d'Alfvén (les plus importantes pour le sujet qui nous occupe), la condition de résonance (dite cyclotron, ou résonance Doppler), s'écrit<sup>10</sup> :

$$\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} = n\Omega, \quad n \text{ entier}, \quad (22)$$

où  $\Omega = qB/\gamma m = v/r_g$  est la fréquence cyclotron de la particule.

Cette égalité exprime que les particules résonnantes sont celles qui voient l'onde décalée par effet Doppler à un multiple de leur gyrofréquence. En particulier, pour  $n = 1$  (pour un proton) ou pour  $n = -1$  (pour un électron), la particule tourne en phase avec le champ perturbateur,  $\delta\mathbf{B}$ , de l'onde, polarisée circulairement, de sorte que la force de Lorentz s'exerce sur elle de manière cohérente, pendant plusieurs tours. Ceci permet alors un transfert d'impulsion significatif.

Dans le cas des ondes magnétosoniques, la résonance majeure est celle où  $n = 0$ . On a alors  $\omega = k_{\parallel}v_{\parallel}$  (résonance de Landau, ou Cherenkov), et les particules voient l'onde Doppler-shiftée à la fréquence nulle. Dans ce "champ statique", l'interaction a alors lieu entre le moment magnétique de la particule et le gradient du champ de l'onde perturbatrice. Il est à noter que dans ce cas, tous les nombres d'onde  $k$ , c'est-à-dire toutes les longueurs d'onde, peuvent susciter des résonances, dès l'instant que les particules ont "le bon pitch-angle".

*Génération d'ondes MHD et isotropisation* Puisqu'il s'agit d'une interaction, l'influence des ondes magnétiques sur les particules énergétiques s'accompagne d'une influence réciproque de ces dernières sur le milieu ambiant. En l'occurrence, si les particules peuvent entrer en résonance avec les irrégularités du champ magnétique, elles sont aussi capable d'en générer, ou d'en augmenter l'amplitude.

Considérons un flot de particules énergétiques se propageant dans un milieu initialement vierge du point de vue des irrégularités magnétiques, et donc incapable de provoquer des déflexions stochastiques, et donc conduire à de la diffusion. Il s'avère que cet ensemble de particules peut générer lui-même les ondes sur lesquelles il pourra ensuite diffuser. Ce mécanisme est par essence non linéaire, ce qui ne facilite pas son étude mathématique, mais il est de la plus haute importance aussi bien pour le transport que pour l'accélération des rayons comiques.

---

<sup>10</sup>voir l'équation (15) du cours de Guy Pelletier.

Notons simplement qu'en vertu des lois de conservation élémentaires, si l'impulsion du faisceau de particules parallèlement aux lignes de champ décroît par suite de la diffusion en pitch-angle, alors l'amplitude des ondes doit nécessairement croître. Nous n'entrerons pas dans les détails, mais disons simplement que l'instabilité responsable de la croissance des ondes d'Alfvén se développe lorsque la vitesse d'ensemble des particules est supérieure à la vitesse d'Alfvén. Ainsi, lorsqu'un flot de particules chargées unidirectionnel est déversé dans le plasma interstellaire à vitesse superalfvénique (comme c'est le cas lors de l'explosion d'une supernova!), il génère des ondes qui dévient les particules et redistribuent leurs pitch-angles, d'autant plus efficacement que ces ondes sont de fait résonantes, puisque c'est par interaction résonante qu'elles ont été créées...

Plus les particules diffusent dans l'espace des pitch-angles, c'est-à-dire plus leur distribution de vitesse devient isotrope, plus la vitesse d'ensemble diminue. Tant que cette vitesse est supérieure à la vitesse d'Alfvén, le processus continue. Le résultat est donc simple : en raison de la diffusion sur les ondes d'Alfvén qu'elles génèrent elles-mêmes dans le plasma interstellaire, les particules énergétiques ne peuvent se déplacer durablement avec une vitesse d'ensemble supérieure à la vitesse d'Alfvén.

#### 4.2 L'accélération stochastique "de Fermi", ou accélération turbulente

De la même manière que les particules chargées pouvaient interagir avec les "nuages magnétiques" idéalisés par Enrico Fermi, et gagner de l'énergie ou en perdre suivant leurs vitesses relatives (à l'entrée et à la sortie), les particules évoluant dans un plasma magnétisé peuvent être défléchies par les ondes MHD, et tirer partie des transferts d'énergie associés.

Bien sûr, si les seules ondes d'Alfvén dans un plasma sont celles produites par les rayons cosmiques eux-mêmes (cf. ci-dessus), il ne faut pas s'attendre à ce qu'elles soient en mesure, à elles seules, d'accélérer des particules. Mais si elles sont générées de l'extérieur, alors les transferts d'énergie entre ondes et particules peuvent conduire, comme dans le cas de l'interaction avec des nuages magnétiques, à une authentique accélération stochastique. Le principe de cette accélération est le même que précédemment : les gains d'énergie se produisent légèrement plus souvent que les pertes !

Le détail du calcul de l'accélération turbulente, même dans un cas simplifié, dépasse le cadre de ce cours introductif. Mais on comprendra aisément que le mécanisme est là encore du deuxième ordre, le taux d'accélération par les ondes d'Alfvén étant plus faible que le taux de diffusion par un rapport de l'ordre de  $v_A/c$ . Il est clair également que l'efficacité du processus dépend de l'isotropisation des particules, mais aussi des modes MHD, et que c'est maintenant la vitesse d'Alfvén qui remplace

la vitesse des nuages de Fermi. L'avantage, par rapport au mécanisme initialement envisagé par Fermi, est d'une part que dans certains environnements astrophysiques la vitesse d'Alfvén peut être beaucoup plus importante que la vitesse des nuages interstellaires, et d'autre part que la distance typique entre deux "centres diffuseurs" est considérablement plus courte que la distance entre nuages ! En pratique, dans le cas d'une turbulence magnétique fortement développée, le libre parcours moyen des particules peut tomber jusqu'à des valeurs de l'ordre du rayon de giration. Plus besoin d'attendre des années entre deux "collisions" !

Mais comme nous l'avons vu plus haut, l'interaction des ondes MHD avec les particules énergétiques est une interaction résonante. Chaque particule, compte tenu de son énergie (rayon de giration) et de son pitch-angle instantané, ne peut interagir qu'avec des ondes de longueur d'onde déterminée. Le spectre des particules énergétiques soumises à ce type d'accélération turbulente dépendra donc de la répartition de l'énergie magnétique sur les différents modes, et donc du spectre de puissance des ondes MHD. Et comme pour le mécanisme original de Fermi, l'échappement des particules (hors du plasma turbulent) est tout aussi déterminant, sans parler des éventuels mécanismes de pertes d'énergie qui peuvent concurrencer les gains (notamment les pertes synchrotron qui limitent l'énergie atteinte par les particules).

On le voit, le calcul effectif d'un spectre de particules accélérées par un tel mécanisme nécessite une prise en compte détaillée des mécanismes microscopiques, concernant non seulement l'interaction des particules avec les ondes MHD, mais aussi la génération de ces dernières et leur description statistique (ces calculs se font généralement dans le formalisme de la théorie cinétique, que nous évoquerons plus bas). Il n'en reste pas moins que l'accélération turbulente de Fermi (du deuxième ordre, donc), est un mécanisme qui peut être extrêmement efficace, et dont il ne fait aucun doute qu'il joue un rôle fondamental dans bon nombre d'environnements astrophysiques. Et si la prédiction du spectre d'énergie des particules est souvent délicate, il faut se souvenir que des spectres en loi de puissances peuvent être obtenus de manière relativement générique, moyennant des hypothèses sur les taux d'accélération et d'échappement (cf. Sect. 3.5) qui sont vérifiées de manière assez naturelle (quoique approchée) par ce type de mécanismes.

## 5. L'accélération par onde de choc : un processus de Fermi du premier ordre

Venons-en maintenant au mécanisme d'accélération le plus populaire en astrophysique : l'accélération *par onde de choc*.

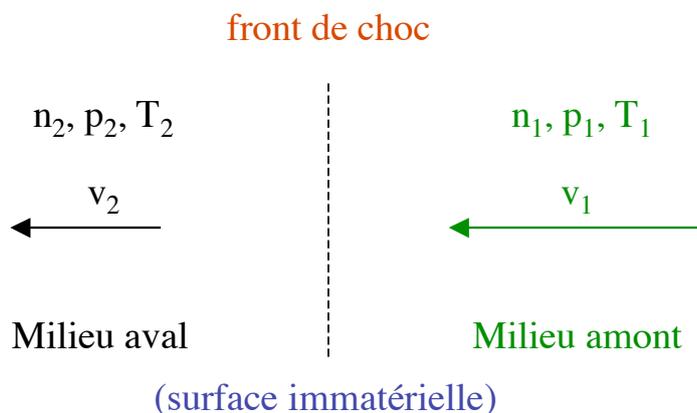


Figure 10.: Schéma d'une onde de choc se propageant dans un milieu, représentée dans le référentiel du front de choc. Le choc est alors immobile, et c'est le milieu amont qui s'écoule vers le choc, à la vitesse  $v_1$ , tandis que le milieu aval s'en éloigne à la vitesse  $v_2$ . Les grandeurs physiques subissent des discontinuités à travers la surface immatérielle du choc.

### 5.1 Des ondes de choc interstellaires

Les ondes de choc sont des phénomènes courants dans les milieux matériels qui nous entourent, notamment dans l'atmosphère ou à la surface de l'eau. Nous savons tous qu'une onde de choc est créée lorsqu'un corps se déplace dans un milieu à une vitesse supérieure à la vitesse du son. Les atomes du milieu ambiant ne peuvent alors pas "évacuer" l'excès de pression provoqué par leur accumulation devant le corps en mouvement, en repoussant les atomes un peu plus en amont, car la vitesse à laquelle un excès de pression localisé peut se propager dans le milieu (en mettant en mouvement les atomes voisins de manière cohérente) est précisément la vitesse du son. Un front se forme alors à travers lequel les grandeurs physiques sont discontinues (varient brutalement sur de très courtes échelles), aucun phénomène physique ne pouvant aplanir l'énorme gradient de densité (et de pression) qui se construit en avant du corps supersonique. Ce dernier balaie tout simplement les atomes devant lui, comme le fait un chasse-neige sur une route enneigée, et il se forme un mur dont la hauteur est fixée par les lois de la thermo-hydrodynamique : lorsque la densité augmente derrière le front de choc, la pression et la température augmentent aussi, de sorte que la vitesse du son s'accroît au point de dépasser la vitesse de l'écoulement.

*Les relations de passage* Les “relations de passage”, que vérifient les différentes grandeurs physiques de part et d’autre de la discontinuité, s’obtiennent en écrivant les différentes lois de conservation – de la matière, de l’impulsion et de l’énergie. Prenons l’exemple d’un choc plan parallèle (écoulement perpendiculaire au choc) infini. Notons  $\rho_1$ ,  $p_1$  et  $T_1$  les densité, pression et température en amont du choc (c’est-à-dire dans le milieu non perturbé – qui ne sait pas qu’un choc arrive!), et  $\rho_2$ ,  $p_2$  et  $T_2$  les mêmes quantités en aval du choc. Notons enfin  $v_1$  la vitesse du milieu amont dans le référentiel du choc (c’est-à-dire l’opposée de la vitesse du choc dans le milieu amont), et  $v_2$  celle du milieu aval (voir Fig. 10). On a alors :

$$\begin{aligned} \rho_2 v_2 &= \rho_1 v_1 \\ p_2 + \rho_2 v_2^2 &= p_1 + \rho_1 v_1^2 \\ \rho_2 v_2 (v_2^2/2 + p_2/\rho_2 + e_2) &= \rho_1 v_1 (v_1^2/2 + p_1/\rho_1 + e_1), \end{aligned} \quad (23)$$

où  $e_i$  est la densité d’énergie, qui vaut  $\frac{1}{\gamma-1}(p_i/\rho_i)$  pour un gaz parfait d’indice adiabatique  $\gamma$ .

Ces équations ont pour solution :

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma + M_1^{-2} \pm (1 - M_1^{-2})}{\gamma + 1}, \quad (24)$$

où  $M_1 = v_1/v_{\text{son},1}$  est le nombre de Mach du choc, c’est-à-dire le rapport de la vitesse du front de choc dans le milieu amont à la vitesse du son (dans ce milieu).

On remarque qu’il existe deux solutions. Celle correspondant au signe “+” est la solution triviale  $v_2 = v_1$ , pour laquelle il n’y a aucune discontinuité<sup>11</sup>. L’autre solution correspond à une onde de choc, et se traduit bien par une discontinuité de vitesse. Des équations (23), on déduit également les discontinuités de densité, de pression et de température (pour un fluide parfait) :

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2M_1^{-2}} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][\gamma - 1 + 2M_1^{-2}]}{(\gamma + 1)^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

---

<sup>11</sup>Réjouissons de retrouver cette solution, qui indique simplement qu’un écoulement parfaitement uniforme est physiquement possible. Si ce n’était pas le cas, il faudrait aussi conclure (par changement de référentiel) qu’un fluide au repos est une aberration physique!

Le saut de densité (inverse du saut de vitesse, par conservation de la masse), est appelé aussi *rapport de compression* et généralement noté  $r$ . Il joue un rôle central dans le mécanisme d'accélération par onde de choc, car comme nous le verrons, il détermine à lui seul la pente du spectre des particules accélérées. On voit que le rapport de compression tend rapidement vers  $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$  lorsque  $M_1$  tend vers l'infini. Autrement dit, pour un choc fort dans un milieu d'indice adiabatique  $\gamma = 5/3$  (gaz parfait monoatomique), on aura toujours  $r \simeq 4$  ( $r = 3.88$  si  $M_1 = 10$ , et  $r = 3.97$  si  $M_1 = 20$ ).

*Microscopie d'une onde de choc* Si on se réfère aux équations (24) et (25), il apparaît que la solution "onde de choc" existe a priori pour des valeurs quelconques du nombre de Mach, pourvu seulement que l'on ait  $M_1^2 > (\gamma - 1)/2\gamma$ , afin que la pression en aval reste positive. En particulier, une onde de choc pourrait exister pour des valeurs de  $M_1$  inférieures à 1, c'est-à-dire non supersoniques. Une telle solution est possible du point de vue hydrodynamique, dans la mesure où elle respecte toutes les lois de la mécanique des fluides (lois de conservation mécaniques). Mais on remarquera que, dans ce cas, le fluide est en réalité dilaté, accéléré et refroidi à travers le choc, et non plus ralenti, comprimé et chauffé, de sorte que son entropie diminue au lieu d'augmenter ! Une telle solution est donc interdite du point de vue thermodynamique (à moins qu'un autre mécanisme n'introduise une entropie compensatrice au niveau de la discontinuité).

Cette remarque nous amène à une question très importante concernant les chocs astrophysiques : quel est le mécanisme qui dissipe l'énergie cinétique et produit l'entropie ? Ces considérations sont absentes du traitement hydrodynamique ci-dessus, précisément parce qu'on s'est placé d'emblée dans une perspective macroscopique. C'est pour cette raison qu'il n'est pas insensé de parler de discontinuités des grandeurs physiques, définies à l'échelle mésoscopique. Mais à l'échelle microscopique, il faut bien qu'un mécanisme réalise le chauffage du milieu. Nous savons simplement que, quel que soit ce mécanisme, son bilan à l'échelle macroscopique sera celui décrit par les relations de passage (24) et (25) – sous peine de violer les lois physiques élémentaires.

Dans un choc ordinaire, par définition pour ainsi dire, les atomes du milieu entrent en collision les uns avec les autres, et c'est par ces collisions que le milieu s'échauffe, dissipant une partie de l'énergie cinétique du milieu amont (vue dans le référentiel du choc) en chaleur. Ce faisant, la température croît très rapidement à travers le choc, et la vitesse d'ensemble des atomes diminue ( $v_2 < v_1$ ). Mais dans un choc astrophysique, aussi paradoxal que cela puisse paraître, il n'y a pas de collisions entre les particules : on parle de *choc non collisionnel* ! C'est le cas notamment des

ondes de choc produites par l'éjection de grandes quantités de matière supersonique lors de l'explosion des supernovæ (typiquement une masse solaire à la vitesse de  $10^4$  km/s), ou des chocs interplanétaires induits par les fluctuations du vent solaire, etc.

Comment le choc peut-il donc se former ? Quel mécanisme dissipe l'énergie ? Après tout, des particules se déplaçant de manière cohérente à une vitesse supersonique dans le milieu interstellaire ne sauraient créer la moindre onde de choc si elles ne pouvaient interagir avec les atomes du milieu, c'est-à-dire si "personne n'était au courant" qu'elles se déplacent effectivement à cette vitesse... Elles interagissent donc bel et bien, à la fois entre elles et avec le milieu ambiant, mais pas par des collisions rapprochées, deux à deux. C'est par l'intermédiaire des champs électromagnétiques, à grande portée, qu'ont lieu les échanges d'énergie et d'impulsion nécessaires à l'établissement des chocs. Les atomes du milieu amont subissent l'influence des particules supersoniques en aval, via des interactions électromagnétiques. L'échelle typique d'établissement du choc (son épaisseur physique) est ainsi de l'ordre de quelques rayons de Larmor des protons thermiques (l'essentiel des particules).

On peut également dire que l'onde de choc emporte avec elle un front magnétique, et une étude détaillée des chocs interstellaires devrait également décrire les discontinuités du champ, ainsi que les courants associés qui peuvent générer des ondes plasma et diffuser les particules, fournissant une résistivité anormale et dissipant l'énergie. Mais nous resterons ici à un niveau de description où de telles subtilités n'interviennent pas, et où d'ailleurs la valeur du champ magnétique n'a aucune importance, pourvu qu'il soit en mesure d'assurer la diffusion des particules énergétiques. Retenons donc simplement que des ondes de chocs non collisionnelles peuvent s'établir dans le milieu interstellaire, et que tant que les particules énergétiques ne rétroagissent pas sur la structure du choc (c'est-à-dire tant que la pression qu'elles exercent et l'énergie qu'elles emportent sont négligeables), le flot de matière à travers la discontinuité peut-être décrit par les équations de l'hydrodynamique et les relations de passage qui s'en déduisent.

## 5.2 Le principe de l'accélération diffusive par onde de choc

Prenons le cas d'un choc plan parallèle infini, qui peut être par exemple l'idéalisation du choc externe produit par l'explosion d'une supernova, de rayon grand devant le rayon de Larmor des particules considérées. Nous allons décrire le mouvement des particules énergétiques autour du front de choc, et montrer qu'il en résulte une accélération. Les particules que nous considérons ont une énergie bien supérieure à celle des protons thermiques, et voient donc le choc comme une discontinuité,

puisque leur rayon de Larmor (échelle minimale de leur libre parcours moyen) est alors très supérieur à l'épaisseur du choc.

Le point essentiel – la clé du mécanisme – est qu'il existe de part et d'autre du front de choc des inhomogénéités magnétiques, semblables à celles que nous avons décrites dans la Section 4., capables de défléchir les particules et d'isotropiser leur distribution, aussi bien en aval qu'en amont. Il est important de rappeler que les particules énergétiques sont capables d'induire elles-mêmes les ondes MHD sur lesquelles elles vont pouvoir diffuser (cf. Sect. 4.1). Ainsi, même si de telles ondes ne préexistent pas en amont du choc (où le milieu n'a pas été perturbé), les premières particules énergétiques vont pouvoir les créer et permettre aux suivantes d'interagir de manière résonante avec elles. Dans le milieu aval, on trouvera également des ondes MHD, comprenant celles du milieu amont, advectées par le fluide et amplifiées par le choc<sup>12</sup>, ainsi que d'autres produites par des instabilités hydrodynamique et MHD dans le milieu choqué (ou encore à la discontinuité de contact entre éjecta et milieu interstellaire choqué).

Nous supposons donc qu'un système d'ondes MHD, qui peut s'apparenter à de la "turbulence magnétique", s'établit en amont comme en aval du choc, et que la distribution des particules énergétiques peut ainsi s'isotropiser dans chacun de ces milieux.

Dès lors, le mécanisme se déroule exactement comme dans le modèle original de Fermi, et nous l'aborderons à nouveau sous l'angle des changements de référentiel successifs : à chaque fois qu'une particule traverse le choc, elle entre dans un milieu de vitesse différente (compte tenu de la discontinuité de vitesse du choc) qui se comporte exactement comme un "nuage magnétique" de Fermi. Mais contrairement au cas de l'accélération stochastique du second ordre (dans sa version originale ou moderne), les nuages magnétiques ont ici la propriété remarquable d'avoir toujours un mouvement orienté *vers* la particule, et non pas aléatoirement dans un sens ou dans l'autre.

Plaçons-nous en effet dans le référentiel du milieu amont (Fig. 11a). Dans ce référentiel, le choc approche à la vitesse  $v_1$ , et le milieu aval à la vitesse  $\Delta v = v_1 - v_2$ . Les particules traversant le choc de l'amont à l'aval voient donc venir à elles un "mur magnétique" (entraînant avec lui un ensemble d'inhomogénéités magnétiques) à la vitesse d'ensemble  $\Delta v$ . Ayant traversé le choc, les particules interagissent avec les ondes plasma du milieu aval, et s'isotropisent donc dans ce milieu. Plaçons-nous alors dans le référentiel du milieu aval, comme sur la figure 11b. Cette fois, le

---

<sup>12</sup>Dans le référentiel galactique, c'est bien sûr le choc qui rattrape en fait les inhomogénéités magnétiques produites dans le milieu amont.

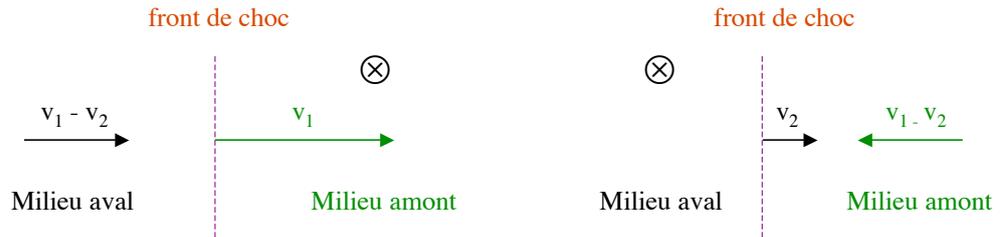


Figure 11.: Schéma de l'onde de choc représentée sur la figure 10, mais vue cette fois dans les référentiels amont (à gauche) et aval (à droite).

choc s'éloigne à la vitesse  $v_2$ , et le milieu amont se rapproche, toujours à la vitesse  $\Delta v = v_2 - v_1$ . En retraversant le choc<sup>13</sup>, les particules voient donc à nouveau venir à elles un “mur magnétique”. Ainsi, la discontinuité de vitesse du choc se traduit, pour les particules, par l'établissement d'un flot convergent de matière magnétisée.

Ce qui est remarquable ici, et qui contraste avec la situation initialement décrite par Fermi, c'est donc que les particules traversant et retraversant le choc effectuent constamment des collisions frontales, dans lesquelles elles gagnent de l'énergie. Cette propriété, comme nous allons le montrer maintenant, implique que le gain d'énergie moyen n'est plus du second ordre, mais du premier ordre en  $\Delta V/c$ .

### 5.3 Une accélération de Fermi du premier ordre

Pour calculer le gain d'énergie des particules à chaque traversée du choc, il suffit, *mutatis mutandis*, de reprendre le raisonnement de la section 3.4. Lors d'une traversée amont-aval, la particule d'énergie  $E_{\text{in}}$  dans le référentiel amont se voit attribuer une énergie  $E'_{\text{in}}$  dans le référentiel aval, conformément à l'équation (9a), puis la particule diffuse dans le milieu aval en conservant son énergie, et repasse dans le milieu amont. Le changement de référentiel associé la fait passer de l'énergie  $E'_{\text{out}} = E'_{\text{in}}$  à l'énergie  $E_{\text{out}}$ , comme dans l'équation (9b), où le facteur  $\beta$  exprime ici le rapport entre la vitesse relative des deux milieux et la vitesse de la lumière,  $\beta = \Delta v/c$ . Le bilan énergétique est exprimé à nouveau par

<sup>13</sup>Notons que les particules énergétiques n'ont aucune difficulté à retraverser le choc, dont la vitesse est toujours largement inférieure à la leur. Cette situation est bien sûr différente dans le cas d'un choc relativiste, ce qui conduit à des modifications très importantes du scénario (cf. cours de Yves Gallant). En particulier, seules les particules au mouvement presque parfaitement aligné avec l'axe du choc peuvent le traverser, et l'hypothèse d'isotropie ne saurait tenir, même approximativement...

l'équation (11), et le gain moyen d'énergie s'obtient en moyennant sur les angles de traversée amont-aval,  $\theta_{\text{in}}$ , et aval-amont,  $\theta'_{\text{out}}$ .

Par hypothèse, la distribution angulaire des particules en amont est isotrope. Si  $n_0$  est leur densité volumique, le nombre de particules par  $\text{cm}^3$  dont la vitesse fait avec la normale au front de choc un angle compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  s'écrit :

$$dn(\theta) = \frac{n_0}{4\pi} d\Omega(\theta) = \frac{1}{2} n_0 \sin \theta d\theta. \quad (26)$$

La vitesse relative de ces particules par rapport au choc est bien sûr  $v \cos \theta$ , de sorte que pendant un intervalle de temps  $dt$ , le nombre de particules qui traversent une surface élémentaire  $dS$  du front de choc sous un angle  $\theta$ , à  $d\theta$  près, s'écrit :

$$d^4N = v \cos \theta dn(\theta) dt d^2S = \frac{1}{2} n_0 v \cos \theta \sin \theta d\theta dt d^2S. \quad (27)$$

Par conséquent, lorsqu'une particule traverse le choc d'amont en aval, la probabilité que son angle d'incidence soit  $\theta_{\text{in}}$  (à  $d\theta_{\text{in}}$  près) est proportionnelle à  $\cos \theta_{\text{in}} \sin \theta_{\text{in}} d\theta_{\text{in}}$ . On obtient donc l'angle d'entrée moyen recherché :

$$\langle \cos \theta_{\text{in}} \rangle = \frac{\int_{\pi}^{\pi/2} \cos \theta_{\text{in}}^2 \sin \theta_{\text{in}} d\theta_{\text{in}}}{\int_{\pi}^{\pi/2} \cos \theta_{\text{in}} \sin \theta_{\text{in}} d\theta_{\text{in}}} = -\frac{2}{3}, \quad (28)$$

et par un calcul exactement symétrique, l'angle de sortie (ou de retour aval-amont) moyen :  $\langle \cos \theta'_{\text{out}} \rangle = 2/3$ . La différence cruciale avec le cas de l'accélération stochastique du second ordre, décrit par l'Eq. (12), c'est que les angles moyens ne dépendent plus de la vitesse du choc. Nous avons alors  $\langle \cos \theta_{\text{in}} \rangle = -\beta/3$ , exprimant le fait que l'excès des collisions frontales sur les collisions fuyantes vient de la légère différence entre les vitesses relatives de la particule par rapport aux "nuages" qui s'approchent et à ceux qui s'éloignent. Maintenant, chaque "collision" contribue à l'augmentation de l'énergie, et l'angle d'incidence moyen ne dépend aucunement des vitesses de la particule et du choc.

En reportant les valeurs ci-dessus dans l'équation (11) et en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas en  $\Delta v/c$ , on obtient finalement l'accroissement d'énergie moyen pour un cycle amont-aval-amont, analogue de la formule (13) ;

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{4}{3} \beta E = \frac{4}{3} \frac{\Delta v}{c} E. \quad (29)$$

Ce résultat est remarquable par trois aspects :

- $\Delta E > 0$  : le processus correspond bien à une accélération,
- $\Delta E \propto E$ , ou  $\Delta E/E = \text{cte}$  : il s'agit d'un processus de Fermi,
- $\Delta E/E \propto \Delta v/c$  : le processus est du premier ordre.

Notons également que la magnitude de l'accélération dépend de la vitesse relative des milieux amont et aval, et donc non seulement de la vitesse du choc,  $V_{\text{choc}} = v_1$ , mais aussi du rapport de compression du choc. En écrivant  $\Delta v = v_1 - v_2 = \frac{r-1}{r} V_{\text{choc}}$ , on obtient finalement, pour un cycle amont-aval-amont :

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} = \frac{4}{3} \frac{r-1}{r} \frac{V_{\text{choc}}}{c}. \quad (30)$$

#### 5.4 Un spectre en loi de puissance universel

Dans la section 3.5, nous avons vu qu'un processus de Fermi pouvait conduire de manière naturelle à un spectre d'énergie des particules accélérées en loi de puissance. Nous avons en particulier montré qu'un tel spectre est obtenu si le temps d'accélération,  $\tau_{\text{acc}}$ , et le temps d'échappement,  $\tau_{\text{esc}}$ , sont tous deux indépendants de l'énergie. Qu'en est-il dans le cas de l'accélération par onde de choc ?

Le temps d'accélération est défini par  $\tau_{\text{acc}} = \frac{1}{E}(\Delta E/\Delta t)$ . Il ne peut donc être indépendant de  $E$  que si la durée d'un cycle amont-aval-amont,  $\Delta t$ , est elle aussi constante. Mais ce n'est pas le cas. Plus l'énergie des particules augmente, plus leur rayon de giration s'accroît et plus leur temps d'isotropisation dans les milieux amont et aval s'allonge. En conséquence, une particule de haute énergie met beaucoup plus de temps qu'une particule de basse énergie à achever un cycle accélérateur. En d'autres termes, plus une particule est énergétique, plus cela prend du temps de l'accélérer davantage. On montre ainsi que la durée d'un cycle s'écrit  $\langle \Delta t \rangle = 4(\kappa_1/v_1c + \kappa_2/v_2c)$ , où  $\kappa_i$  est le coefficient de diffusion effectif des particules dans le milieu  $i$ . Dans l'hypothèse classique d'une diffusion de Bohm (cf. les cours de Guy Pelletier et de Fabien Casse), on a  $\kappa \propto E$ , de sorte que le temps d'accélération est proportionnel à l'énergie des particules.

Nous voici donc hors du cadre de la section 3.5 (i.e.  $\tau_{\text{acc}}$  et  $\tau_{\text{esc}}$  indépendants de  $E$ ), mais de manière assez remarquable, cela ne compromet en rien l'établissement d'un spectre en loi de puissance, et nous allons pouvoir mener un argument parfaitement similaire à celui de la section (3.5), dans la mesure où si  $\tau_{\text{acc}}$  dépend effectivement de  $E$ , il se trouve que  $\tau_{\text{esc}}$  aussi, et d'une manière telle que le rapport  $\tau_{\text{acc}}/\tau_{\text{esc}}$  soit constant ! Qualitativement, on comprend que si l'accroissement du coefficient de diffusion conduit à l'augmentation du temps d'accélération, il

conduit aussi à l'accroissement du temps d'échappement en laissant la possibilité à une particule s'étant éloignée à une grande distance du choc, d'y revenir à nouveau pour achever son cycle accélérateur.

Quantitativement, nous raisonnerons en termes de probabilité d'échappement au cours d'un cycle, ou si l'on préfère de probabilité de retour d'une particule ayant traversé le choc. Dans le cadre de nos hypothèses, une particule ayant traversé le choc d'aval en amont a une probabilité 1 de retourner en aval, tout simplement parce que le choc avance dans le milieu amont, tandis que la particule, isotropisée dans ce milieu, y a une vitesse moyenne nulle. En aval, en revanche, les particules voient le choc s'éloigner constamment vers l'amont, de sorte que vu du choc, elles dérivent inexorablement de plus en plus loin du choc, entraînées par le gaz interstellaire.

Pour calculer la probabilité d'échappement en aval, il suffit donc de calculer le rapport du flux de particules traversant le choc d'amont en aval ( $\Phi_{\text{ud}}$ , pour "upstream-to-downstream") et du flux de particules traversant une surface fictive (n'importe laquelle), loin en aval du choc. Au premier ordre en  $V_{\text{choc}}/c$ , le premier flux s'obtient en intégrant l'équation (27) sur tous les angles de  $\pi/2$  à  $\pi$ . On obtient  $\Phi_{\text{ud}} = \frac{1}{4}n_0v$ , où  $v \simeq c$  est la vitesse des particules considérées. Quand au flux d'échappement, il correspond tout simplement à la dérive des particules par rapport au choc, qui se fait à la vitesse  $v_2 = \frac{1}{4}V_{\text{choc}}$ . On a donc  $\Phi_{\text{esc}} = n_0v_2$ , ce qui permet d'écrire la probabilité d'échappement au cours d'un cycle (c'est-à-dire le nombre de particules s'échappant en aval, rapporté au nombre de particules entrant en aval par l'amont) :

$$\mathcal{P}_{\text{esc}} = \frac{\Phi_{\text{esc}}}{\Phi_{\text{ud}}} = \frac{4v_2}{v} = \frac{4}{r} \frac{V_{\text{choc}}}{v} = \frac{4}{r} \beta_{\text{choc}}, \quad (31)$$

le fait remarquable étant ici que cette probabilité d'échappement est indépendante de  $E$ .

Voyons donc comment ceci conduit à l'établissement d'un spectre en loi de puissance. Comme nous l'avons vu, après chaque cycle, les particules ont gagné (en moyenne, suivant leurs angles de traversée du choc) une énergie  $\Delta E = kE$ , où  $k$  se lit sur l'équation (30). Si les particules sont injectées dans le processus à l'énergie  $E_0$  (typiquement l'énergie à partir de laquelle le choc est effectivement vu comme une discontinuité), leur énergie après  $n$  cycles sera :

$$E_n = (1 + k)^n E_0 \quad \text{où} \quad k = \frac{4}{3} \frac{r - 1}{r} \beta_{\text{choc}}. \quad (32)$$

Mais seule une fraction  $\mathcal{P}_{\text{ret}} = 1 - \mathcal{P}_{\text{esc}}$  des particules ne revient en amont et complète chaque cycle. Sur  $N_0$  particules injectées à l'énergie

$E_0$ , seules

$$N_n = N_0 \mathcal{P}_{\text{ret}}^n = N_0 (1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})^n \quad (33)$$

particules seront encore présentes après  $n$  cycles, avec l'énergie moyenne  $E_n$ . Autrement dit, il y a de moins en moins de particules qui ont une énergie de plus en plus élevée. Du point de vue mathématique, le spectre d'énergie des particules accélérées par ce processus s'obtient donc facilement en éliminant  $n$  entre  $E_n$  et  $N_n$ . On trouve :

$$n = \frac{\log(E/E_0)}{\log(1+k)} \implies N(\geq E) = N_0 (1 - \mathcal{P}_{\text{esc}})^{\frac{\log(E/E_0)}{\log(1+k)}}, \quad (34)$$

ou encore (puisque  $a^{\ln b} = e^{\ln a \ln b} = b^{\ln a}$ ) :

$$N(\geq E) = N_0 \left( \frac{E}{E_0} \right)^{\frac{\log(1-\mathcal{P}_{\text{esc}})}{\log(1+k)}}. \quad (35)$$

Le spectre différentiel des particules accélérées s'obtient finalement en dérivant le spectre intégral ci-dessus :  $N(E) = |dN(\geq E)/dE|$ . Pour des chocs non relativistes où  $\beta_{\text{choc}} \ll 1$ , on peut développer les logarithmes dans l'exposant de l'équation (35), qui devient  $-\mathcal{P}_{\text{esc}}/k$ . Par suite, on a :

$$N(E) = (x-1) \frac{N_0}{E_0} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{-x} \quad \text{où} \quad x = \frac{r+2}{r-1}. \quad (36)$$

Le résultat ci-dessus parle de lui-même : non seulement nous avons obtenu un spectre d'énergie en loi de puissance, mais sa pente ne dépend que du rapport de compression,  $r$  ! Comme par ailleurs le rapport de compression ne dépend pratiquement pas de la vitesse du choc, pourvu que le choc soit fort (nombre de Mach supérieur à 20, disons, cf. Sect. 5.1), le spectre des particules accélérées par une onde choc – bonus inattendu ! – est en réalité universel...

### 5.5 Les miracles de l'accélération diffusive par onde de choc

Le mécanisme d'accélération diffusive par onde de choc (ADOC) est remarquable à plus d'un titre. Tout d'abord, il est extrêmement simple à décrire. Qualitativement, il est un cas particulier de ce que nous avons appelé l'accélération par changement de référentiel, qui permet de raisonner à l'échelle macroscopique sans se soucier de la manière détaillée dont les particules interagissent entre elles ou avec les structures macroscopiques (nuages magnétisés, ondes de choc, etc.). Dans le cas de l'ADOC, il s'agit simplement d'une onde de choc, qu'on peut en outre

supposer plane et infinie tant qu'on ne s'intéresse qu'à des particules dont le rayon de Larmor est petit devant le rayon du choc (c'est le cas typiquement jusqu'à des énergies de l'ordre de  $10^{13}$  eV). La simplicité de ce "cadre expérimental" explique sans doute en partie la facilité du traitement théorique. Elle explique aussi le caractère systématique des gains d'énergie enregistrés par les particules, qui fait de ce processus un mécanisme d'accélération du premier ordre (en la vitesse relative typique des perturbations magnétiques, ici la vitesse du choc).

Il est intéressant de noter que l'ADOC résout presque miraculeusement toutes les difficultés du modèle original de Fermi. Tout d'abord, le temps d'accélération prohibitif de l'ordre de quelques centaines de millions d'années est ramené à quelques semaines pour des particules de quelques GeV, qui composent l'essentiel du rayonnement cosmique! Il y a plusieurs raisons à cela. D'abord nous avons affaire à un mécanisme du premier ordre, en  $\beta_{\text{choc}}$  et non en  $\beta_{\text{nuages}}^2$ . Ensuite, la discontinuité de vitesse dans un choc produit par une supernova est bien supérieure à la vitesse typique des nuages de Fermi : plusieurs milliers de km/s,  $\beta_{\text{choc}} \sim 10^{-2}$ , au lieu de quelques dizaines,  $\beta_{\text{nuages}} \sim 10^{-4}$ , soit  $\beta_{\text{nuages}}^2 \sim 10^{-8}$ . Enfin, l'intervalle de temps typique séparant deux "collisions" accélératrices se trouve réduit de quelques années au temps qu'il faut aux particules pour diffuser sur des distances relativement courtes autour du choc. La distance typique de confinement des particules autour du choc est de l'ordre de  $\Delta r \sim \kappa_i/v_i$ , avec les notations précédentes (cf. Sect. 6.), ce qui conduit à un temps moyen de retour vers le choc de l'ordre de  $4\kappa/cV_{\text{choc}}$ , comme nous l'avons mentionné plus haut. Numériquement, le coefficient de diffusion de Bohm pour des protons de 10 GeV dans un champ de quelques microGauss est de l'ordre de  $10^{22}$  cm<sup>2</sup>/s, et la durée d'un cycle amont-aval-amont s'évalue à  $t_{\text{cycle}} \sim 10^4$  s. Le temps d'accélération vaut donc  $\tau_{\text{acc}} \sim t_{\text{cycle}}/\beta_{\text{choc}} \sim 10^6$  s, soit une douzaine de jours!

La réduction du temps d'accélération permet aussi d'atténuer considérablement le problème de l'injection. On se souvient que dans le modèle de Fermi, seules les particules d'énergie relativement élevées au départ pouvaient être accélérées, car les autres perdaient plus d'énergie (par interactions coulombiennes) entre deux "collisions" qu'elles n'en gagnaient à chacune d'elle. Ici, le problème de l'injection se réduit à produire des particules dont le rayon de giration est supérieur (disons d'un facteur 10) à l'épaisseur du choc, afin que ce dernier soit effectivement vu comme une discontinuité. Il semble établi aujourd'hui que la queue de la distribution thermique (de Maxwell-Boltzmann) suffit à fournir des protons susceptibles d'être accélérés. Le cas des électrons, dont le rayon de Larmor est beaucoup plus faible, à énergie égale, est plus problématique, mais un certain nombre de processus semblent être en mesure de piéger

des électrons dans des structures MHD capables de les porter aux énergies requises (de nombreux travaux sont en cours à ce sujet).

Enfin, et c'est peut-être le résultat le plus remarquable, le mécanisme d'accélération par onde de choc produit naturellement un spectre en loi de puissance d'indice universel. Et pas n'importe lequel ! En injectant dans la formule (36) la valeur canonique du rapport de compression dans un choc fort,  $r = 4$ , on obtient  $x = 2$ , de sorte que le spectre produit par l'ADOC est en  $E^{-2}$ , très proche de ce qui est observé dans la plupart des sources astrophysiques non thermiques, et compatible avec le spectre observé du rayonnement cosmique (corrigé des effets de propagation, notamment d'un confinement variable en fonction de l'énergie ; cf. cours de David Maurin et Richard Taillet).

Ajoutons pour finir que le mécanisme d'accélération diffusive par onde de choc est beaucoup plus qu'un modèle théorique séduisant. Il a été testé de nombreuses manières, sous différentes approches analytiques ainsi que par des simulations numériques diverses (Monte-Carlo, équations stochastiques différentielles, etc.). Mais surtout, ses effets ont été observés en direct autour des ondes de choc interplanétaires ("bow shock" quasi-stationnaire de la Terre ou chocs en mouvement dans le vent solaire). De nombreuses sondes spatiales ont ainsi pu mesurer l'accroissement subit de la densité de particules énergétiques à la traversée d'un tel choc, et même si la gamme dynamique observée n'est pas comparable à celle attendue dans les restes de supernova, tous les éléments de la théorie qui pouvaient être testés dans ce type d'environnement l'ont été avec succès !

Voilà qui donne confiance en l'universalité de ce mécanisme, dont cette section aura en outre montré à quel point il était naturel. En conclusion, l'ADOC est tout sauf un mécanisme *ad hoc* !<sup>14</sup>

### 5.6 Accélération de Fermi du premier et du second ordre

Le grand succès du mécanisme d'accélération par onde de choc décrit ci-dessus donne souvent l'impression d'une supériorité de principe du mécanisme de Fermi du premier ordre sur celui du second ordre. C'est une impression fautive ! Tout d'abord, il existe des environnements astrophysiques où seul l'accélération stochastique du second ordre a lieu, tout simplement parce qu'il n'y pas d'ondes de choc. Mais plus généralement, les versions modernes du mécanisme de Fermi du second ordre (cf. Sect. 4.) montrent clairement comment une turbulence magnétique forte peut-être extrêmement efficace pour accélérer les particules chargées. L'échelle de temps d'accélération s'obtient très simplement, conformément au forma-

---

<sup>14</sup>Désolé !

lisme adopté ici, comme  $\tau_{\text{acc}} = \Delta t_{\text{coll}} / \langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}}$ , où  $\Delta t_{\text{coll}}$  est l'intervalle de temps entre deux "collisions" (à la Fermi) et  $\langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}}$  est l'accroissement d'énergie moyen lors de ces collisions.

Pour le mécanisme d'accélération du second ordre,  $\Delta t_{\text{coll}}$  n'est rien d'autre que le temps libre moyen du processus d'isotropisation par les ondes MHD,  $\Delta t_{\text{coll}} \sim \tau_s$ , qui peut être de l'ordre du temps de Larmor dans les cas favorables (cf. les cours de Guy Pelletier et de Fabien Casse). Quant à l'accroissement relatif d'énergie, il est bien sûr du second ordre en la vitesse typique des inhomogénéités magnétiques – en l'occurrence les ondes d'Alfvén :  $\langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}} \sim \beta_A^2$ , où  $\beta_A \equiv v_A / c$ . Finalement, on a donc :

$$\tau_{\text{acc,II}} \sim \tau_s / \beta_A^2, \quad (37)$$

où l'indice "II" indique qu'il s'agit du processus de Fermi du second ordre.

Dans le cas de l'ADOC, nous avons vu que  $\langle \Delta E / E \rangle_{\text{coll}} \sim \beta_{\text{choc}}$ , et que  $\Delta t_{\text{coll}} \sim \kappa / V_{\text{choc}} c$ . En écrivant  $\kappa \sim v^2 \tau_s$ , où  $v \simeq c$  est la vitesse de la particule, on obtient pour le temps d'accélération du processus de Fermi du premier ordre :

$$\tau_{\text{acc,I}} \sim \tau_s / \beta_{\text{choc}}^2. \quad (38)$$

Ainsi, comme il est aussi rappelé dans le cours de Guy Pelletier, si l'accélération du premier ordre est plus efficace que l'accélération du second ordre (dans sa version moderne), c'est uniquement dans la mesure où  $\beta_{\text{choc}} > \beta_A$ , c'est-à-dire dans la mesure où la vitesse du choc est supérieure à la vitesse d'Alfvén. En pratique, c'est toujours le cas dans les restes de supernova jeunes, et c'est bien parce que les éjecta sont supersoniques et superalfvéniques qu'un choc se forme. Mais vers la fin de la vie d'un reste de supernova, quand le choc ralenti au point de devenir légèrement superalfvéniq, puis transalfvéniq, la supériorité de l'accélération du premier ordre tend à s'atténuer. Or il faut bien reconnaître qu'un choc de supernova passe plus de temps à faible vitesse qu'à grande vitesse... Et dans des environnements tels que les superbulles, produits par l'explosion successive et rapprochée de dizaines, voire de centaines de supernovæ, la vitesse typique des nombreux chocs secondaires et des diverses inhomogénéités de vitesse est souvent comparable à la vitesse d'Alfvén, de sorte que l'accélération du second ordre concurrence celle du premier (ou s'y superpose).

Il est important également de remarquer que l'accélération diffusive par onde de choc repose sur l'isotropisation des particules dans les milieux amont et aval. Or cette isotropisation est assurée par l'interaction avec les inhomogénéités magnétiques, qui donne lieu de manière inévitable à de l'accélération stochastique du second ordre. L'ADOC ne serait rien, donc, sans le processus de Fermi du second ordre, même si le gain moyen d'énergie dans ces processus de chaque côté du choc reste faible devant le

gain d'énergie systématique à chaque traversée du choc (toujours parce que  $V_{\text{choc}} > v_A$ ).

Enfin, il va de soi que la distinction entre mécanismes du premier et du second ordre, qui repose sur un développement en puissances de  $\Delta v/c$ , perd son sens lorsque les écarts de vitesse dans le milieu considéré sont proches de la vitesse de la lumière, comme au voisinage des chocs relativistes ou même au sein des boules de feu que sont les sursauts gamma (cf. cours de Frédéric Daigne)...

## 6. L'approche de la théorie cinétique

Il n'est pas question ici de discuter les différents raffinements qu'il convient d'apporter au modèle de l'accélération par onde de choc pour tenir compte de la taille finie du choc, de son évolution temporelle, de la rétroaction des particules énergétiques sur sa structure hydrodynamique, de la croissance d'instabilités MHD spécifiques modifiant le transport des particules, ou encore des limitations apportées par les processus de perte d'énergie (rayonnement synchrotron, par exemple). Il est clair, cependant, que la description extrêmement simple que nous avons adoptée ici n'est pas adaptée à la prise en compte de tous ces phénomènes. Le besoin se fait donc sentir d'un cadre théorique plus général et plus souple. Un tel cadre est celui de la théorie cinétique, que nous allons donc introduire brièvement dans cette dernière section, avant de l'appliquer au cas de l'accélération par une onde de choc plane, infinie et stationnaire, pour retrouver les résultats de la section précédente.

### 6.1 Introduction sommaire à la théorie cinétique

Sans entrer dans les détails, disons que l'on s'intéresse à l'évolution de la distribution des particules dans l'espace géométrique (transport) et dans l'espace des impulsions (accélération ou freinage). *In fine*, nous souhaitons connaître la *fonction de distribution*,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , des particules énergétiques. Par définition,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{p}$  est le nombre de particules que l'on trouve à l'instant  $t$  aux positions comprises entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , avec une impulsion comprise entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ .

*L'équation de Liouville* Idéalement, la description complète du système de  $N$  particules est donnée par sa position dans l'espace des phases à  $6N$  dimensions, c'est-à-dire par la spécification de la position et de l'impulsion de chaque particule, à chaque instant. Mais puisque cette position change très rapidement, et de façon désordonnée, on choisit de se limiter à une description statistique consistant à déterminer la probabilité qu'a le système de se trouver en un point donné de l'espace des phases.

Cette probabilité est définie à partir de l'ensemble de toutes les réalisations possibles du même état macroscopique, c'est-à-dire en considérant l'ensemble des systèmes microscopiquement différents, mais qui ont le même "aspect macroscopique" – en particulier, la même fonction de distribution.

La théorie cinétique est fondée sur la traduction de ces probabilités d'occupation en termes de densité dans l'espace des phases. Concrètement, on imagine un fluide occupant l'espace des phases et dont la densité en chaque point serait proportionnelle à la probabilité de présence du système en cet endroit. On note  $\mathcal{D}$  cette densité, de sorte que la probabilité de trouver les particules  $1, 2 \dots N$  en  $\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N$  (à  $d\mathbf{r}_i$  et  $d\mathbf{p}_i$  près) est  $\mathcal{D}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{p}_N$ . L'évolution du système est alors décrite simplement par l'équation de conservation du nombre de particules dans l'espace des phases à  $6N$  dimensions :  $\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \nabla_{6N} \cdot (D\mathcal{V}_{6N}) = 0$ , où  $\mathcal{V}_{6N}$  est le vecteur vitesse dans l'espace des phases, c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps du vecteur "position" à  $6N$  dimensions. De manière explicite, on a :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} (\dot{\mathbf{r}}_i \mathcal{D}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} (\dot{\mathbf{p}}_i \mathcal{D}) \right] = 0, \quad (39)$$

où pour chaque particule  $i$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_i \equiv d\mathbf{r}_i/dt = \mathbf{p}_i / \sqrt{m^2 + p_i^2/c^2}$ , et  $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv d\mathbf{p}_i/dt$ . Bien sûr, la vitesse varie d'un point à l'autre, de sorte que  $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$  n'est pas nul, et l'accélération produite par la force de Lorentz dépend de la vitesse de la particule, de sorte que  $\nabla_{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}}$  non plus n'est pas nul. On ne peut donc pas sortir naïvement  $\dot{\mathbf{r}}_i$  et  $\dot{\mathbf{p}}_i$  des parenthèses dans l'équation (39)... mais on peut le faire de manière éclairée !

En effet, le formalisme hamiltonien de la mécanique nous enseigne que si  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  sont des variables canoniquement conjuguées, les équations du mouvement peuvent être écrites sous la forme  $\dot{\mathbf{r}} = \partial H / \partial \mathbf{p}$ , et  $\dot{\mathbf{p}} = -\partial H / \partial \mathbf{r}$ , où  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  est justement le Hamiltonien. En reportant dans l'équation (39), on voit alors que les deux termes aux dérivées croisées s'éliminent et l'on obtient l'équation de Liouville :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left[ \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{r}_i} + \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \mathbf{p}_i} \right] = 0. \quad (40)$$

On objectera qu'en présence d'un champ magnétique,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  ne sont *pas* des variables canoniquement conjuguées, et que la variable conjuguée de  $\mathbf{r}$  est en fait  $\mathbf{p} + e\mathbf{A}$ , où  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur du champ magnétique.

Mais le fait que la force de Lorentz s'exerce perpendiculairement à la vitesse (et donc à l'impulsion) assure que l'équation (40) demeure valide<sup>15</sup>.

*Les fonctions de distribution* L'équation de Liouville contient en principe toute l'information sur le système considéré, mais en pratique elle n'est pas intégrable. On peut cependant obtenir une description partielle plus ou moins fine de la réalité physique par la méthode dite *régressive*, qui consiste à perdre de l'information sur le système par intégrations successives. Ainsi, la fonction de distribution à une particule,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , que nous avons introduite plus haut et qui donne la densité de particules au point  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  de l'espace des phases à 6 dimensions, vaut simplement  $N$  fois la probabilité pour qu'une particule donnée se trouve en  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$ , sans spécification de la position et de la vitesse des autres. Elle est donc obtenue en intégrant la densité  $\mathcal{D}$  sur l'espace des phases des  $N - 1$  autres particules :

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N \int \mathcal{D} \, d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N. \quad (41)$$

De même, la fonction de distribution à deux particules, décrivant les corrélations binaires entre deux points 1 et 2, est définie par :

$$f_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2; t) = N(N - 1) \int \mathcal{D} \, d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N, \quad (42)$$

et ainsi de suite, jusqu'à la fonction de distribution à  $N$  particules, qui est tout simplement  $f_{12\dots N} = N! \times \mathcal{D}$ . Le facteur  $N!$  prend en compte toutes les permutations possibles des  $N$  particules.

*La hiérarchie BBGKY* En intégrant l'équation de Liouville, on obtient ainsi tout un système d'équations décrivant l'évolution des diverses fonctions de distribution. En particulier, la fonction de distribution à une particule obéit à :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{X}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = C(f_{12}), \quad (43)$$

où l'on a remplacé  $\dot{\mathbf{p}}_1$  par  $\mathbf{X}_1$ , la force exercée sur la particule 1, et où  $C(f_{12}) = - \int \mathbf{X}_{12} \cdot (\nabla_{\mathbf{p}_1} f_{12}) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{X}_{12}$  étant la force exercée par la particule 2 sur la particule 1.

On obtient de même l'équation pour  $f_{12}$ , qui fait intervenir  $f_{123}$  au second membre, puis celle pour  $f_{123}$  qui fait intervenir  $f_{1234}$ , et ainsi

---

<sup>15</sup>On peut s'en assurer par le calcul direct, en écrivant  $\dot{\mathbf{p}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = e\mathbf{E} + \frac{e}{\gamma m} \mathbf{p} \times \mathbf{B}$ , où  $\gamma = (1 + p^2/m^2 c^2)^{1/2}$  est le facteur de Lorentz des particules, et en remarquant que  $\nabla_{\mathbf{p}}(1/\gamma) = -\mathbf{p}/m^2 c^2 \gamma^3$  est parallèle à  $\mathbf{p}$ .

de suite. On a donc une hiérarchie d'équations faisant toujours appel à la fonction de distribution d'ordre supérieur, et dont l'ensemble est équivalent à l'équation de Liouville. Ce système couplé de  $N$  équations est connu sous le nom de *hiérarchie BBGKY*, d'après Born, Bogolioubov, Green, Kirkwood et Yvon. L'intérêt de cette hiérarchie est qu'elle peut être stoppée à un niveau quelconque, moyennant une hypothèse physique raisonnable sur le niveau inférieur.

Dans de nombreux cas, et dans le notre en particulier, la fonction de distribution à une particule donne une description suffisante du système. Il s'agit donc simplement d'exprimer le *terme de collision*, noté  $C(f_{12})$  dans l'équation (43). C'est ainsi que l'on obtient l'équation de Boltzmann, en écrivant le terme adéquat correspondant à des collisions binaires quasi ponctuelles :  $C(f_{12}) = \int [f_1(\mathbf{p}'_1)f_1(\mathbf{p}'_2) - f_1(\mathbf{p}_1)f_1(\mathbf{p}_2)] |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| b db d\theta d\mathbf{p}_2$ , où  $\mathbf{p}_i$  et  $\mathbf{p}'_i$  sont les vitesses des particules avant et après le choc,  $b$  est le paramètre d'impact, et  $\theta$  est l'angle qui repère l'orientation du plan passant par le centre de masse des deux particules et contenant le vecteur  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ , dans lequel on peut décrire la collision.

*Équations de Fokker-Planck et de Vlasov* Dans le cas qui nous intéresse ici, les collisions entre particules sont totalement négligeables, et la physique est dominée par les interactions à longue portée, c'est-à-dire à grand paramètre d'impact, qui dévient peu les particules. Les trajectoires individuelles obéissent alors à un processus Markovien, de type "marche aléatoire". L'équation ainsi obtenue en écrivant l'indépendance des déviations successives est l'équation de Fokker-Planck, correspondant au terme de collision suivant :

$$C(f_{12}) = \frac{1}{\Delta t} \left[ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (f_1 \langle \Delta \mathbf{p} \rangle) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{p}} (f_1 \langle \Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{p} \rangle) \right], \quad (44)$$

où  $\Delta \mathbf{p} \Delta \mathbf{p}$  est le tenseur de rang 2 de composantes  $\Delta p_i \Delta p_j$ , et la moyenne est effectuée sur le temps  $\Delta t$ .

Lorsque les interactions entre particules sont à longue portée, il existe une autre façon de décrire le système, qui est spécialement efficace lorsque les phénomènes collectifs sont prédominants. Puisque les effets collectifs l'emportent les collisions binaires entre particules, le terme de collision peut être tout simplement annulé :  $C(f_{12}) = 0$  dans l'équation (43). Les interactions existent néanmoins (sinon aucun choc ne pourrait se former ! ; cf. plus haut), mais toutes les particules agissent en réalité collectivement sur l'une quelconque d'entre elles, par le champ moyen global qu'elles produisent. Celui-ci peut alors être traité comme un champ extérieur, et "passer dans le membre de gauche". On obtient

alors l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} + (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}'_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} = 0, \quad (45)$$

où  $\mathbf{X}'_1$  est la force exercée par l'ensemble des particules sur la particule considérée, et  $\mathbf{X}_1$  serait la force résultant de n'importe quel champ extérieur. Dans le cas qui nous intéresse, les seules forces agissantes sont les forces électromagnétiques,  $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , où les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont ceux produits par l'ensemble des particules au sein du plasma, conformément aux équations de Maxwell.

*La séparation des particules énergétiques et du plasma* Munis des éléments ci-dessus, nous pouvons utiliser le cadre de la théorie cinétique, en considérant les particules énergétiques comme formant une classe à part, décrite par sa fonction de distribution propre, et interagissant avec un substrat "extérieur" : le plasma interstellaire. Celui-ci abrite des champs magnétiques inhomogènes stochastiques, sous forme de turbulence magnétique, de "nuages magnétiques" en mouvement ou encore d'ondes MHD, comme nous l'avons décrit plus haut, et ces champs sont capables de défléchir les particules et donc de faire varier leur pitch-angle, repéré par rapport au champ magnétique moyen, ou même tout simplement d'isotropiser leur distribution.

Une telle séparation entre les particules énergétiques et le substrat (plasma) n'est possible en principe que si les particules sont en nombre insuffisant pour influencer la dynamique du plasma lui-même. Ce dernier peut alors être décrit indépendamment par l'équation de Vlasov (45), tandis que la fonction de distribution à une particule des rayons cosmiques,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , obéit à l'équation de Boltzmann sans collisions :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (46)$$

## 6.2 L'équation de transport des particules énergétiques

*L'équation fondamentale* Comme nous l'avons déjà mentionné, la très forte conductivité du plasma interstellaire tend à annuler très rapidement tout champ électrique qui pourrait se créer, de sorte que le champ électrique moyen est toujours nul dans le référentiel du plasma :  $\langle \mathbf{E}' \rangle = 0$ . Mais si le plasma est en mouvement avec une vitesse locale  $\mathbf{u}$ , les inhomogénéités magnétiques qui y sont gelées (en vertu des propriétés classiques de la MHD idéale) produisent un champ  $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  dans le référentiel Galactique (cf. Sect. 3.3), de sorte qu'on peut réécrire le

troisième terme de l'équation (46) comme :

$$\begin{aligned} q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= q[(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \\ &= -\mathbf{B} \cdot \left[ q(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right] f \equiv -\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{D}}f, \end{aligned} \quad (47)$$

la dernière égalité servant de définition à l'opérateur vectoriel  $\hat{\mathbf{D}}$ .

On obtient alors l'équation fondamentale du transport des particules énergétiques :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{D}}f = 0. \quad (48)$$

Telle quelle, cette équation n'est cependant guère utilisable, puisque le champ magnétique qui y figure n'est pas spécifié. Mais l'essence de la théorie cinétique appliquée au transport des rayons cosmiques consiste justement à donner de ce champ une description stochastique réaliste, et à moyenner cette équation fondamentale sur l'ensemble des champs fluctuants (à toutes les échelles), afin d'obtenir une fonction de distribution variant lentement dans l'espace et dans le temps, et représentant le comportement moyen des particules énergétiques.

Nous ne montrerons pas ici comme ce type de moyenne peut être mis en oeuvre, mais nous invitons le lecteur intéressé à consulter l'excellent ouvrage de Toptygin (*Cosmic Rays in Interplanetary Magnetic Fields*, D. Reidel Publishing Company, 1985). Dans le cadre de la théorie quasi-linéaire, le principe consiste à décomposer le champ  $\mathbf{B}$  en un champ régulier, à grande échelle, et un champ fluctuant à petite échelle (de longueur de corrélation,  $L_c$ , petite devant le rayon de Larmor des particules), et à effectuer un calcul perturbatif. On décompose ainsi la fonction de distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  comme une somme  $f = \bar{f} + \delta f$ , et on moyenne l'équation fondamentale sur le champ fluctuant à petite échelle.

Le résultat obtenu est le suivant :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{B}_0 \cdot \hat{\mathbf{D}}\bar{f} = \hat{D}_\alpha \bar{T}_{\alpha\beta} \hat{D}_\beta \bar{f}, \quad (49)$$

où  $\bar{T}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int_0^\infty d\tau T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}; (\mathbf{v} - \mathbf{u})\tau)$ , et  $T_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  est le tenseur de corrélation du champ magnétique stochastique.

Nous ne développerons pas plus avant les calculs, mais il est important de comprendre que les coefficients cinétiques (tenseurs de diffusion dans l'espace réel, dans l'espace des pitch-angles et dans l'espace des impulsions...) s'obtiennent en principe à partir des propriétés stochastiques du champ magnétique (comme on le voit par exemple sur l'équation précédente).

Mais comme nous l'avons vu, le spectre d'énergie des particules accélérées par une onde de choc ne dépend pas des coefficients cinétiques fondamentaux, pas même de la valeur moyenne du champ magnétique ! Quelle est donc l'approximation majeure qui permet une telle simplification ?

*L'approximation diffusive* L'approximation fondamentale qui permet de décrire simplement le transport des rayons cosmiques est l'approximation dite *diffusive*. Elle consiste à regarder le système sur des échelles suffisamment grandes pour que les particules aient eu le temps de subir de multiples déflexions et d'acquérir une distribution pratiquement isotrope. Cette approximation est tout à fait justifiée dans le cas de l'ADOC, puisque notre hypothèse fondamentale est que les inhomogénéités magnétiques sont suffisantes pour isotropiser rapidement la distribution des particules en amont et en aval du choc.

Dans le cadre de cette approximation, on peut de nouveau utiliser une méthode perturbative et développer la fonction de distribution en harmoniques sphériques. Si on ne garde que les deux premiers termes de l'expansion, à savoir le terme isotrope et le terme dipolaire, on peut écrire :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ N(\mathbf{r}, p, t) + \frac{3}{v^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t) \right], \quad (50)$$

où la fonction  $N(\mathbf{r}, p, t)$  donne le nombre de particules énergétiques par unité de volume au point  $\mathbf{r}$ , ayant une impulsion comprise entre  $p$  et  $p + dp$ , indépendamment de leur direction, et  $\mathbf{J}$  est la densité de courant des particules, supposée 'petite', qui mesure l'écart à l'isotropie. On vérifie sans difficulté que  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{v} d\Omega_{\mathbf{p}}$ , ce qui justifie son appellation ( $d\Omega_{\mathbf{p}}$  est l'angle solide élémentaire dans l'espace à trois dimensions des impulsions).

Pour implémenter l'approximation diffusive, il suffit de reporter le développement ci-dessus dans l'équation cinétique générale (49), adaptée par exemple au cas d'une turbulence magnétique à la Kolmogorov, en négligeant les termes d'ordre trois ou plus en  $u/v$ . En séparant les termes isotropes (indépendants de la direction de  $\mathbf{p}$ ) et les termes anisotropes (proportionnels à  $\mathbf{p}/p$ ), on obtient deux équations couplées sur la fonction de distribution isotrope,  $N$ , et sur le courant  $\mathbf{J}$ . Pour des temps grands devant le temps libre moyen (c'est-à-dire dès qu'il est raisonnable d'invoquer l'approximation diffusive), l'équation sur  $\mathbf{J}$  apparaît avoir la solution suivante :

$$J_{\alpha} = -\chi_{\alpha\beta} \nabla_{\beta} N - \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} u_{\alpha}, \quad (51)$$

où les coefficients  $\chi_{\alpha\beta}$  sont les composantes du tenseur de rang 2, obtenu à partir de la description stochastique du champ, et où l'on a utilisé

la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés (comme partout dans la suite). On reconnaît bien sûr dans le terme  $-\chi_{\alpha\beta}\nabla_{\beta}N$  le *courant de diffusion*, qui n'exprime rien d'autre que la loi de Fick, à savoir que le courant diffusif est proportionnel au gradient de densité et "s'écoule" des fortes densités vers les faibles. Le tenseur  $\chi_{\alpha\beta}$  est donc tout simplement le tenseur de diffusion. Le second terme, quant à lui, représente le *courant de convection*, lié au fait que c'est dans le référentiel du plasma,  $\mathcal{R}^*$ , que la distribution des particules énergétiques est isotrope, mais que le plasma est lui-même en mouvement<sup>16</sup>.

En reportant l'expression (51) dans la seconde équation, vérifiée par  $N$ , on obtient finalement l'équation de transport des particules énergétiques dans l'approximation diffusive (avec sommation sur les indices répétés) :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u_{\alpha} \frac{\partial N}{\partial r_{\alpha}} - \frac{p}{3} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial r_{\alpha}} \frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial r_{\alpha}} \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_{\beta}}. \quad (52)$$

Nous terminerons ce cours en résolvant cette équation dans le cas où le champ de vitesse du plasma sous-jacent est celui correspondant à une onde de choc, et en montrant que l'on retrouve le spectre d'énergie des particules calculé dans la section précédente, par des arguments totalement différents. Mais auparavant, il n'est pas inutile de commenter la forme de l'équation (52).

*Signification physique des différents termes* L'équation (52) a la forme générale d'une équation de transport dans la mesure où elle exprime la variation de la densité de particules, en chaque point et à chaque impulsion, en fonction du temps. Il faut aussi noter que l'espace des phases n'a plus que 4 dimensions, trois pour la position géométrique,  $\mathbf{r}$ , et une seule pour la norme de l'impulsion,  $p$ . C'est la conséquence logique de l'approximation diffusive, puisque si la distribution des particules est isotrope, les

<sup>16</sup>En notant toujours  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  le champ de vitesse du plasma, on passe facilement de la fonction de distribution isotrope dans  $\mathcal{R}^*$ ,  $f^*(\mathbf{p}^*) = N(p^*)/4\pi$ , à celle dans le référentiel Galactique local, par une simple transformation de Lorentz :

$$f(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi} N(\gamma(u)|\mathbf{p} - \frac{\mathbf{u}}{c^2}E|).$$

Le courant convectif s'obtient alors en calculant l'intégrale qui le définit ( $\mathbf{J}(\mathbf{r}, p, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{v} d\Omega_{\mathbf{p}}$ ). Au premier ordre en  $\mathbf{u}/c$  (le plasma est non-relativiste), on a :

$$\mathbf{J}_{\text{conv}} = \int f(\mathbf{p}) \mathbf{v} d\Omega_{\mathbf{p}} = \frac{1}{4\pi} \int \left( N - \frac{E}{c^2} \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{p}}{p} \frac{\partial N}{\partial p} \right) \mathbf{v} d\Omega_{\mathbf{p}} = -\frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \mathbf{u}.$$

variables angulaires sont dégénérées. Reportons-nous à l'équation (50). Si on s'en tient à la partie isotrope, on voit que le nombre de particules dont la norme de l'impulsion est comprise entre  $p$  et  $p + dp$  est donné par :

$$dn = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \times 4\pi p^2 dp = p^2 N(\mathbf{r}, p, t) dp. \quad (53)$$

On reconnaît sans peine au membre de droite de (52) la forme bien connue de l'équation de la diffusion, qui confirme la signification physique des  $\chi_{\alpha\beta}$  comme les composantes du tenseur de diffusion des particules.

Dans le membre de gauche, le deuxième terme est le terme de convection habituel  $\mathbf{u} \cdot \nabla N$ . Il représente le changement du nombre de particules au point  $\mathbf{r}$  simplement en raison de l'arrivée d'un nouvel élément de plasma, apportant avec lui un nombre différent de particules énergétiques, pourvu que leur concentration dans le plasma soit non uniforme. Le taux de changement de  $N$ , c'est-à-dire le " $\partial N/\partial t$ " correspondant, est donc égal au gradient de  $N$ , multiplié par la vitesse à laquelle le plasma est amené au point  $\mathbf{r}$  dans la direction considérée,  $u_\alpha$ .

Le troisième terme du membre de gauche est sans doute le moins habituel. Il contient une dérivée par rapport à  $p$ , et décrit donc le changement d'impulsion des particules au cours de leur transport, c'est-à-dire leur accélération ou leur ralentissement. La présence de la divergence  $\partial u_\alpha/\partial r_\alpha$  montre que le changement d'énergie des particules est lié aux compressions ou aux dilatations du plasma hôte. L'effet d'accélération disparaît en effet, du moins à cet ordre en  $u/v$ , si le milieu est incompressible ( $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ). On dit en général que ce terme représente la décélération adiabatique des particules. Voyons pourquoi.

Le premier principe de la thermodynamique nous enseigne que l'énergie interne d'un gaz,  $U$ , dont le volume de confinement,  $V$ , varie, est modifiée conformément à la loi  $dU = -PdV$ , où  $P$  est la pression du gaz. Par définition, la pression est égale au taux de transfert d'impulsion, dans une direction donnée, à travers une surface unité. On a donc, en intégrant sur l'angle solide  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  (où  $\theta$  est l'angle que fait l'impulsion de la particule avec la normale à la surface unité considérée) :

$$P = \int f(\mathbf{p}) \times p \cos \theta \times v \cos \theta \times 2\pi \sin \theta d\theta p^2 dp = \int f(\mathbf{p}) \frac{pv}{3} 4\pi p^2 dp, \quad (54)$$

sachant que  $\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2/3$ .

L'énergie interne du gaz s'exprime en fonction de son volume et de la densité de particules,  $n = \int f(p) dp$ , comme  $U = E \times nV$ , de sorte que l'équation  $dU = -PdV$  se réécrit ( $d(nV) = dN = 0$ ) :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{P}{n} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = -\frac{\int \frac{pv}{3} f(p) dp}{\int f(p) dp} \times \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (55)$$

par définition de la divergence<sup>17</sup>. Si on s'intéresse aux pertes d'énergie adiabatiques des particules d'impulsion  $p$  uniquement, en les considérant comme indépendantes des autres, on peut prendre une fonction de distribution piquée sur  $p$ ,  $f(p') = \delta(p' - p)$ , et écrire le rapport des intégrales de l'équation ci-dessus comme  $pv/3 = p^2c^2/3E$ . En remarquant par ailleurs que  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  et donc  $pdp = EdE/c^2$ , on obtient finalement

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{E}{pc^2} \frac{p^2c^2}{3E} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{p}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (58)$$

soit exactement la forme du troisième terme de l'équation (52).

Ce résultat va nous permettre à présent de dériver l'équation de transport des rayons cosmiques de manière extrêmement simple, sans passer par la description stochastique des champs magnétiques.

### 6.3 Nouvelle dérivation de l'équation de transport

L'hypothèse fondamentale sur laquelle nous nous appuyons est toujours celle de l'approximation diffusive, qui nous permet d'exprimer le flux de particules à travers une surface unité perpendiculaire à  $dr_\alpha$  comme  $N\dot{r}_\alpha - \chi_{\alpha\beta}(\partial N/\partial r_\beta)$ , par définition même des coefficients de diffusion. L'équation de continuité dans l'espace des phases, exprimant simplement la conservation du nombre de particules, s'écrit alors directement :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\dot{r}_\alpha N - \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta}) + \frac{\partial}{\partial p_\alpha}(\dot{p}_\alpha N) = 0, \quad (59)$$

soit

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\dot{r}_\alpha N) + \frac{\partial}{\partial p_\alpha}(\dot{p}_\alpha N) = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta}. \quad (60)$$

Développons les dérivées :

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\dot{r}_\alpha N) = u_\alpha \frac{\partial N}{\partial r_\alpha} + (\nabla \cdot \mathbf{u})N, \quad (61)$$

---

<sup>17</sup>Le taux d'accroissement du volume,  $d\mathcal{V}/dt$ , est déterminé en tout point par le champ de vitesse du gaz,  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . Pour un cube élémentaire de côté  $dx, dy$ , et  $dz$ , nous avons :

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = (u_{x+dx} - u_x)dydz + (u_{y+dy} - u_y)dx dz + (u_{z+dz} - u_z)dx dy, \quad (56)$$

soit :

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dx dy dz = (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathcal{V}. \quad (57)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(\dot{p}_\alpha N) = \dot{p}_\alpha \frac{\partial N}{\partial p_\alpha} + N \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha}. \quad (62)$$

Dans la mesure où  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ , on a  $\partial p / \partial p_x = p_x / p$ , et  $\partial N / \partial p_x = p_x / p (\partial N / \partial p)$ . Par ailleurs,  $dp^2/dt = 2p\dot{p}$  et  $dp^2/dt = 2p_x\dot{p}_x + 2p_y\dot{p}_y + 2p_z\dot{p}_z$ . Ainsi :

$$\sum_\alpha \dot{p}_\alpha \frac{\partial N}{\partial p_\alpha} = \frac{1}{p} \frac{\partial N}{\partial p} \sum_\alpha \dot{p}_\alpha p_\alpha = \frac{1}{p} \frac{\partial N}{\partial p} \times p\dot{p} = \dot{p} \frac{\partial N}{\partial p}. \quad (63)$$

En utilisant l'équation (58), et en la généralisant par ailleurs à chaque composante ( $\dot{p}_\alpha = -\frac{p_\alpha}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})$ ), on peut donc réécrire (62) comme :

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha}(\dot{p}_\alpha N) = \frac{p}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} \frac{\partial N}{\partial p} - (\nabla \cdot \mathbf{u})N. \quad (64)$$

En reportant finalement (61) et (64) dans (60), on obtient à nouveau l'équation de transport pour les particules énergétiques dans l'approximation diffusive :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial N}{\partial r_\alpha} - \frac{p}{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\alpha} \frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \chi_{\alpha\beta} \frac{\partial N}{\partial r_\beta}, \quad (65)$$

qui est bien identique à l'équation (52).

La facilité avec laquelle nous venons d'obtenir cette équation est déconcertante, surtout si l'on songe à l'effort fourni dans la première méthode pour moyenner la fonction de distribution des particules énergétiques, d'abord sur les champs fluctuants, puis sur les anisotropies. Mais l'identité des résultats masque une différence fondamentale entre les deux méthodes : la seconde nous a permis d'écrire formellement l'équation de transport, grâce à l'approximation diffusive, mais sans nous dire quoi que ce soit sur la valeur des coefficients de transport.

L'essence du premier calcul n'était donc pas l'établissement de l'équation de transport elle-même, mais bien la détermination du tenseur de diffusion,  $\chi_{\alpha\beta}$ . C'est lui qui contient toute la physique du processus, et qui cache les champs magnétiques et leurs interactions avec les particules énergétiques, qui n'apparaissent pas explicitement dans l'équation de transport.

Un autre point délicat mérite d'être explicité. Nous avons appliqué le résultat concernant la décélération adiabatique, Eq. (58), aux particules énergétiques, mais est-ce bien légitime ? Pour qu'il y ait un sens à invoquer les pertes d'énergie d'une particule évoluant dans un volume en expansion, il faut que cette particule soit d'une manière ou d'une

autre couplée au gaz qui se dilate, et participe à la pression qui travaille positivement au cours de cette dilatation (ou négativement s'il y a contraction). Si elle n'était pas couplée au gaz ambiant, la particule ne "saurait" tout simplement pas que celui-ci change de volume. S'il est légitime d'appliquer les changements d'énergie adiabatiques à nos particules énergétiques, c'est parce que par hypothèse elles interagissent efficacement avec le milieu ambiant, par les multiples déflexions sur les inhomogénéités magnétiques qui les isotropisent. Elles "font corps", en quelque sorte, avec le gaz, et de ce fait participent aussi bien à son énergie interne qu'à sa pression. C'est donc bien l'approximation diffusive, selon laquelle l'isotropisation locale des particules énergétiques par rapport au plasma interstellaire est pratiquement parfaite, qui nous permet d'appliquer le premier principe de la thermodynamique – et notamment sa conséquence, l'équation (58) – pour dériver l'équation de transport de manière quasi-triviale.

Ceci étant fait, il reste à la résoudre dans le cas d'une onde de choc plane infinie.

#### 6.4 Calcul du spectre des particules accélérées au voisinage d'une onde de choc

Dans le cas d'un choc plan infini, les symétries du problème nous permettent de réécrire l'équation de transport (52) en ne faisant intervenir qu'une dimension spatiale :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{p}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial x} \chi \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (66)$$

où la direction  $x'x$  est orthogonale au choc et orientée dans le sens du courant. Nous nous placerons dans le référentiel du choc, situé en  $x = 0$ , avec  $x < 0$  en amont et  $x > 0$  en aval.

Nous recherchons une solution stationnaire de cette équation, telle que  $\partial N / \partial t = 0$ . De plus, en amont comme en aval du choc, le fluide a une vitesse uniforme :  $u = u_1$  pour  $x > 0$ , et  $u = u_2$  pour  $x < 0$ , de sorte que l'équation de transport se simplifie en :

$$u \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \chi \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (67)$$

L'intégration est alors immédiate :

$$N(x, p) = A(p) + B(p) \exp \left[ \int_0^x \frac{u}{\chi(x', p)} dx' \right], \quad (68)$$

où  $A(p)$  et  $B(p)$  sont des constantes d'intégration, a priori différentes de part et d'autre de la discontinuité. De même, le coefficient de diffusion  $\chi$

n'est nullement supposé identique en amont et en aval, ni même constant au sein de ces milieux. On s'attend au contraire à ce qu'il varie dans l'espace, reflétant les propriétés locales des inhomogénéités magnétiques.

La seule chose que l'on puisse dire, c'est que  $\chi$  est positif. Par conséquent, en aval, on voit que si  $B \neq 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ , ce qui est physiquement exclus. On doit donc avoir  $B(p) = 0$ , et

$$N(x, p) = N_0(p); \quad x > 0. \quad (69)$$

Du côté amont, on a  $A(p) = N(-\infty, p) \equiv N_{\text{in}}(p)$ , qui est le spectre incident, c'est-à-dire le spectre des rayons cosmiques très loin en amont du choc. La valeur de  $B$  s'obtient en raccordant les solutions amont et aval au niveau du front d'onde, c'est-à-dire en  $x = 0$ . On sait que  $N$  est continue, car comme nous l'avons vu, le rayon de giration des particules énergétiques, et donc a fortiori l'échelle de variation de  $N$ , sont grands devant l'épaisseur du choc. On a ainsi<sup>18</sup> :

$$N(x, p) = N_{\text{in}}(p) + [N_0(p) - N_{\text{in}}(p)] \exp \left[ \int_0^x \frac{u_1}{\chi_1(x', p)} dx' \right]; \quad x < 0. \quad (70)$$

Nous avons jusqu'à présent utilisé l'équation de transport de part et d'autre du choc. Cette équation peut en fait être considérée comme valide dans tout l'espace, y compris au niveau du choc, à condition de traiter les fonctions  $u$ ,  $\chi$  et  $\partial N/\partial x$  comme des fonctions généralisées, pouvant subir des discontinuités, et  $N$ , d'après ce que nous venons de dire, comme une fonction continue. On peut alors intégrer (66) dans un interval étroit autour de  $x = 0$  ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), en tenant compte du fait que  $u$  et  $N$  sont finis, tandis que  $(\partial/\partial x)\chi$  et  $\partial N/\partial x$  et  $\partial u/\partial x$  sont singuliers (de type fonction delta). On obtient ainsi :

$$\chi_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} - \chi_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{u_1 - u_2}{3} p \frac{\partial N}{\partial p}; \quad \text{en } x = 0, \quad (71)$$

où l'on a noté  $N_1$  et  $N_2$  sont les fonctions de distributions en aval et en amont, et les dérivées spatiales sont évaluées en  $0^-$  et  $0^+$ , respectivement.

Cette égalité doit être considérée comme la condition de passage pour la fonction de distribution des particules énergétiques au niveau

---

<sup>18</sup>Cette expression témoigne de l'existence d'un gradient de concentration des particules énergétiques dirigé vers le choc, c'est-à-dire vers l'aval. Ce gradient entraîne une diffusion vers l'amont, qui est exactement compensée par le flot régulier vers le choc (dans le sens du courant). Une telle solution est impossible en aval, car pour compenser ce courant convectif il faudrait un gradient vers l'aval, faisant augmenter sans cesse le nombre de particules énergétiques, jusqu'à l'infini.

du choc, au même titre que celles obtenues ci-dessus pour la vitesse, la densité, la pression et la température du gaz interstellaire. Elle nous permet d'obtenir le spectre émergeant du choc,  $N_{\text{out}}(p)$ , à partir du spectre incident  $N_{\text{in}}(p)$ . En effet, en reportant (69) et (70) dans (71), il vient :

$$\frac{dN_{\text{out}}}{d \ln p} = \frac{3r}{r-1} (N_{\text{in}} - N_{\text{out}}), \quad (72)$$

où  $r$  est le rapport de compression à la traversée du choc. L'intégration est à nouveau immédiate :

$$N_{\text{out}}(p) = \frac{3r}{r-1} p^{-y} \int_0^p dp' N_{\text{in}}(p') p'^{y-1}, \quad (73)$$

où

$$y = \frac{3r}{r-1}. \quad (74)$$

L'équation (73) montre que des particules incidentes d'énergie  $p'$  sont accélérées par le choc et redistribuées suivant un spectre d'impulsion en loi de puissance, de pente logarithmique  $y$ , qui vaut 4 si le rapport de compression vaut  $r = 4$ , c'est-à-dire pour un choc fort et pour  $\gamma = 5/3$ . Le cas d'une injection monochromatique,  $N_{\text{in}}(p') = p_0^{-2} N_0 \delta(p' - p_0)$ , redonne directement le résultat de la section 5., Eq. (36) :

$$N(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{dn}{dp} \frac{dp}{dE} = \frac{dp}{dE} \times p^2 N(p), \quad (75)$$

soit, dans la limite relativiste :

$$N(E) = r(x-1) \frac{N_0}{E_0} \left( \frac{E}{E_0} \right)^{-x} \quad \text{avec} \quad x = \frac{r+2}{r-1}, \quad (76)$$

où l'on a utilisé la correspondance (53), et où le facteur  $r$  supplémentaire vient du fait qu'on considère ici non plus le nombre total de particules énergétiques, mais leur densité volumique, qui est  $r$  fois plus grande en aval, en raison de la compression du plasma<sup>19</sup>. Dans le régime non relativiste, où  $E \neq pc$ , c'est bien sûr la loi de puissance en impulsion (obtenue en résolvant l'équation cinétique), et non celle en énergie, qui prévaut.

---

<sup>19</sup>Dans le cas de l'accélération dans un choc de supernova, les particules énergétiques advectées vers l'aval devront subir par la suite une expansion adiabatique pour être "intégrées" au milieu interstellaire moyen, de densité  $r$  fois plus faible. Si ce retour au milieu interstellaire moyen se fait effectivement de manière adiabatique, l'impulsion de chaque particule sera simplement divisée par un facteur  $r^{1/3}$ , ce qui ne détruira pas la loi de puissance originale.

Il est remarquable que le spectre obtenu en résolvant l'équation de transport en présence d'une onde de choc soit totalement indépendant de la forme du coefficient de diffusion,  $\chi$  : il dépend uniquement de la structure dynamique du choc. Il devait en être ainsi, bien entendu, puisque nous avons déjà obtenu le résultat à partir d'une étude purement macroscopique, basée sur l'application successive de changements de référentiels ne faisant pas intervenir les champs. Mais il est instructif de voir comment le coefficient de diffusion disparaît du résultat final, sous la seule hypothèse que les particules sont suffisamment défléchies pour traverser de nombreuses fois le choc. C'est la même condition qui justifie notre emploi de l'équation de transport dans l'approximation diffusive.

## 7. Conclusion

Dans les pages qui précèdent, nous avons montré comment l'interaction de particules chargées avec des inhomogénéités magnétiques pouvaient conduire à leur accélération. L'idée originale d'Enrico Fermi était qu'une partie de l'énergie contenue dans des structures magnétisées macroscopiques pouvait ainsi être transférée à une population de particules énergétiques, de manière stochastique, par une succession d'interactions dans lesquelles les particules pouvaient soit gagner, soit perdre de l'énergie. Dans un tel processus, analogue à une thermalisation, on peut obtenir un spectre en loi de puissance par la combinaison d'un gain d'énergie exponentiel et d'un taux d'échappement constant des particules. Dans le modèle de Fermi, les structures macroscopiques étaient les nuages denses magnétisés présents dans le milieu interstellaire, qui ne répondent finalement pas au cahier des charges de l'accélération des rayons cosmiques, notamment en raison d'un temps d'accélération trop long.

Nous avons ensuite discuté les versions modernes du modèle de Fermi. Tout d'abord, l'accélération stochastique des particules en interaction résonante avec des ondes plasma, au deuxième ordre en  $v_A/c$ , où  $v_A$  est la vitesse d'Alfvén. Ensuite, nous avons exposé le principe de l'accélération diffusive par onde de choc, qui, grâce à la discontinuité de vitesse (équivalente à un flot convergent), est un mécanisme du premier ordre en  $v_{\text{choc}}/c$ . Nous avons montré que le spectre d'énergie des particules ainsi accélérées présentait un caractère universel : il s'agit d'une loi de puissance, dont l'indice logarithmique ne dépend que du rapport de compression à travers la discontinuité. Nous avons dérivé ce spectre très simplement en supposant que les particules étaient isotropisées de part et d'autre du choc, et en raisonnant par changements de référentiels successifs, chaque fois que les particules traversent le choc.

Nous avons enfin introduits quelques éléments de la théorie cinétique permettant de dériver l'équation de transport des particules énergétiques dans le milieu interstellaire, dans l'approximation diffusive. La résolution de cette équation au voisinage d'une onde de choc nous a permis de retrouver la solution universelle de l'accélération de Fermi du premier ordre, indépendante des conditions locales de diffusion.

Il est néanmoins important de comprendre les limitations des modèles étudiés. Tout d'abord, la validité de l'hypothèse d'isotropie de la distribution des particules énergétiques n'est pas garantie en général, notamment si la turbulence magnétique n'est pas isotrope, ou si le temps d'isotropisation n'est pas négligeable devant les autres temps caractéristiques du problème. En particulier, l'isotropie est totalement prise en défaut au voisinage d'un choc relativiste (cf. cours d'Yves Gallant). La condition de stationnarité est également violée dans le cas d'une onde choc de supernova : l'âge fini du choc et sa géométrie sphérique influencent notamment les conditions d'accélération des particules de plus haute énergie. Des mécanismes de pertes d'énergie, concurrents de l'accélération proprement dite, peuvent également être importants. Ainsi, par exemple, l'accélération des électrons dans une onde de choc de supernova est souvent limitée par les pertes synchrotron dues au champ magnétique localement amplifié. Dans d'autres environnements, les pertes "Inverse Compton" sur le champ de rayonnement local peuvent également jouer un rôle significatif.

Signalons enfin que, dans la pratique, dès que l'accélération est suffisamment efficace, l'influence des particules énergétiques sur le milieu ambiant ne peut plus être négligée. L'énergie emportée par ces particules doit être prise en compte dans les bilans d'énergie (qui déterminent notamment les conditions de passage au niveau du choc), et leur pression peut également jouer un rôle important dans l'équilibre hydrodynamique du plasma. Quant à la structure magnétohydrodynamique du milieu ambiant, elle dépend également de la présence des particules énergétiques, dont on a indiqué le rôle dans la génération des ondes plasma indispensables à l'accélération. Tous ces mécanismes de rétroaction de l'accélération elle-même sur les conditions physiques environnantes, conduisent à des effets non-linéaires qui peuvent compliquer considérablement les calculs présentés ici (voir le cours d'Yves Gallant pour un aperçu de certains effets étudiés aujourd'hui). Le problème complet de l'accélération des particules dans les différents environnements astrophysiques est encore loin d'être résolu, et de nombreux progrès restent à accomplir, notamment dans le domaine de la physique des plasma interstellaires, et bien sûr celui de la modélisation des sources. Avis aux amateurs ! Les astronomies non-thermiques et non-photoniques connaissent actuellement un développement considérable, et elles devraient fournir

dans les années qui viennent des informations très précieuses pour accompagner les études théoriques en astrophysique des hautes énergies. Toutes les bonnes volontés sont les bienvenues pour prendre part à cette belle aventure. Alors... n'hésitez-plus !



*[...] tout ce qui était d'abord invisible, ou ne pouvait être entrevu qu'à travers de vagues ténèbres, brillait maintenant d'une excessive splendeur. Les trônes des diverses déités rangées en cercle dardaient les couleurs de tous les joyaux connus des orfèvres mortels, et des diamants connus aux dieux seuls. Le chemin qui conduisait au grand trône était pavé d'étoiles.*

Charles Baudelaire, "Le jeune enchanteur", d'après G. Croly



*Le charme authentique des toitures du château.*



*Ombre et lumière devant le château...*